

પાઠ્યપુસ્તક માળા:—૨

ભૂમિતિનાં મૂળતત્ત્વો

ભાગ ૨

પ્રકાશક

અરોતર એજ્યુકેશન સોસાયટી,
આણંદ

૧૦૮૪૮

આઈ.આઈ.સી.

ગુજરાત વિદ્યાપીઠ ગ્રંથાલય

[ગજરાતી કૉપીરાઝિટ વિભાગ]

અનુક્રમાક ૧૦૮૪૮ વર્ગીક

પુસ્તકનું નામ ભૂમિતિના મૂળતત્વો

વિષય મર:૮૪૩:૩૬

પાઠ્યપુસ્તક માળા:—૨

ભૂમિતિનાં મૂળતત્ત્વો

લેખક

ભીખાભાઈ કુબેરભાઈ પટેલ

આચાર્ય, દાદાભાઈ નવરોજી વિનય મંદિર, આણંદ

પ્રકાશક

ચરોતર એજ્યુકેશન સોસાયટી,

આણંદ

૧૯૨૩

પુસ્તક મળવાનું ઠેકાણું
ચરોતર એજ્યુકેશન સોસાયટી, આણંદ

ચરોતર વિદ્યાપીઠ ગ્રંથાલય
અમદાવાદ
ગુજરાત કોપીરાઈટ સંગ્રહ
૧૯૯૯

સર્વ હક સ્વાધીન.

આણંદ ચરોતર પ્રિન્ટિંગ પ્રેસમાં ત્રિભુવનદાસ કીસીભાઈ
પટેલે પ્રકાશકને માટે છાપ્યું. તા. ૧૦-૮-૨૩.

નિવેદન.

માધ્યમિક શાળાનો ભૂમિતિનો પૂરો અભ્યાસક્રમ આપવાના હેતુથી ગુજરાતી ભાષામાં લખાયેલું આ પ્રથમ જ પાઠ્યપુસ્તક હોવાથી તેની અગત્ય સંબંધી ખાસ કહેવાનું હોય નહિ.

કોઈ પણ વિષયના શિક્ષણની શરૂઆતમાં વિદ્યાર્થીઓને તે વિષય સરળ અને રસિક લાગે છે તો તે રસ હંમેશ કાયમ રહે છે અને વિદ્યાર્થીઓ હોંસથી તે વિષયમાં પ્રગતિ કરી શકે છે. આ લક્ષમાં રાખીને આ પુસ્તકમાં કેટલાક ફેરફાર કરવામાં આવ્યા છે. પુસ્તકનો ઉપયોગ કરનારને આ ફેરફારો ક્યા હેતુથી કરવામાં આવ્યા છે તે જણાવવામાં આવે તો તેનો ઉપયોગ કરવામાં સરળતા થાય એ હેતુથી તે સંબંધી મારા વિચારો ટુંકમાં જણાવું તો અસ્થાને નહિ ગણાય.

૧. વ્યાખ્યાઓ.

વ્યાખ્યાઓ સાથે લગી એક જગાએ નહિ આપતાં છુટક છુટક ઉપયોગમાં આવે તેવી રીતે જ આપેલી છે. પારિભાષિક શબ્દો સંબંધી ચોક્કસ ખ્યાલ આપ્યા સિવાય તેમનો ચોક્કસાદથી ઉપયોગ થાય તેમ નહિ લાગવાથી શરૂઆતથી જ્યાં જ્યાં તેવા શબ્દોનો ઉપયોગ કરવાની જરૂર પડી છે ત્યાં ત્યાં પહેલાં વ્યાખ્યાઓ જ આપી છે અને તેમનું જ્ઞાન વિદ્યાર્થીઓને સચોટ થાય તે માટે તે ઉપર કેટલાક દાખલાઓ પણ સાથે સાથે જ આપ્યા છે. વિદ્યાર્થીઓ સાધનોનો ઉપયોગ કરે અને ચોક્કસાદથી માપસર આકૃતિઓ દોરતાં શીખે એ જ હેતુ લક્ષ્યમાં રાખેલો છે.

ખિંદુ, રેખા અને પૃષ્ઠની વ્યાખ્યાઓ ક્રિયાત્મક ભાગમાં વિદ્યાર્થીઓના ખ્યાલમાં આવે તેવી રીતે આપવામાં આવી છે. આની શાસ્ત્રીય વ્યાખ્યાઓ તાર્કિક ભાગની શરૂઆતમાં જ શિક્ષકે આપવી. “ખિંદુને સ્થિતિ છે પણ પરિભાષુ નથી” એટલે આપણે દોરીએ છીએ તે બિંદુને પરિભાષુ તો છે જ પણ ભૂમિતિમાં જ્યારે આપણે ખિંદુનો વિચાર કરીએ છીએ ત્યારે તેના પરિભાષુ (લંબાઇ, પહોળાઇ, જડાઇ) સંબંધી આપણે કંઈ પણ ખ્યાલ કરતા જ નથી. એટલે ભૂમિતિનું ખિંદુ ફક્ત સ્થિતિ બતાવવાના કામમાં જ આવે છે. ખિંદુનું પરિભાષુ જોઈતું જોણું તેટલી ચોક્કસાઇથી આ સ્થિતિ બતાવી શકાય છે માટે આપણે ખિંદુ જોણામાં જોણા પરિભાષુ વાળું દોરીએ છીએ “રેખાને લંબાઇ છે પણ પહોળાઇ અને જડાઇ નથી” આનો અર્થ રેખાને પહોળાઇ અને જડાઇ બીજકૂલ છે જ નહિ એમ નથી પણ રેખાનો ઉપયોગ આપણે ભૂમિતિમાં બે ખિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર ગણવામાં જ કરીએ છીએ. એટલે ટુંકામાં આપણે રેખાનો વિચાર કરીએ છીએ ત્યારે તેની જડાઇ અને પહોળાઇનો બીજકૂલ વિચાર કરતા નથી. પણ ફક્ત તેની લંબાઇનો જ વિચાર કરીએ છીએ. ઉદાહરણ તરીકે સર રેખા ૫^મ લાંબી છે તે ઉપરથી આપણે સમજીએ છીએ કે ૬ અને ૮ ખિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર ૫” છે. આમાં રેખાની પહોળાઇનો આપણે બીજકૂલ ખ્યાલ કરતા નથી માટે રેખા પાતળામાં પાતળા દોરવી હિતાવહ છે. આ જ પ્રમાણે પૃષ્ઠનું પણ સમજવું. પૃષ્ઠનો વિચાર કરતાં આપણે તેની લંબાઇ અને પહોળાઇને લક્ષમાં લઇએ છીએ પણ જડાઇ લક્ષમાં લેતા નથી એટલે ભૂમિતિના પૃષ્ઠને જડાઇ નથી એમ કહેવું યથાર્થ જ છે.

૨ કૃત્યો.

સામાન્ય રીતે જૂમિતિનાં પુસ્તકોમાં પ્રથમ પ્રાયોગિક ભાગ આપવામાં આવે છે અને તેમાં મુખ્યત્વે કરીને સાખીત કરવાના સિદ્ધાન્તોનાં સત્યો શોધી કહાડવા પ્રયત્ન થાય છે. આ પછી તુર્ત જ તાર્કિકભાગ શરૂ થાય છે. આથી તાર્કિક ભાગના સિદ્ધાન્તો અને દાખલાઓમાં કરવામાં આવતી રચનાઓનું વિદ્યાર્થીઓને જ્ઞાન હોતું નથી અને છતાં તે કરવી તો પડે છે જ એટલે તે સંખ્યા વિદ્યાર્થીઓને ચોક્કસ માહિતી નહિ હોવાથી સાધનોનો યથાર્થ ઉપયોગ થતો નથી અને કામ ચોક્કસ અને રસિક બનતું નથી. વધારામાં તાર્કિક ભાગ શરૂ કરતા પહેલાં ક્રિયાત્મક ભાગ કરવાથી વિદ્યાર્થીઓના હાથ અને આંખ કેળવાય છે અને તેઓ સાધનોનો યથાર્થ ઉપયોગ ઝડપથી કરતાં શીખે છે. આથી કેટલીક પ્રાથમિક વ્યાખ્યાઓ અને તે ઉપર મનોમતનો આપ્યા પછી તુર્ત જ કેટલાંક સહેલાં અને ઉપયોગી કૃત્યો આપવામાં આવ્યાં છે. બધાં કૃત્યોની સાખીતી તો પ્રથમ ભાગના પહેલા ૧૩ સિદ્ધાન્તો થઈ ગયા પછી જ વિદ્યાર્થીઓ સારી રીતે સમજી શકે માટે સાખીતી તો ત્યાર પછી જ શીખવવાનો ઉદ્દેશ રાખ્યો છે.

આકીનાં જે કૃત્યો છુટક છુટક જે સિદ્ધાન્તોની મદદથી સાખીત થાય છે તેમની પાછળ જ આપવામાં આવ્યાં છે.

દરેક કૃત્યનો મહાવરો વિદ્યાર્થીઓને થાય અને તેમના હાથ, આંખ અને શુદ્ધિ પશુ કેળવાય તે હેતુથી દરેક કૃત્ય ઉપર મનોમત આપવામાં આવ્યું છે અને તેમાં દાખલાઓ પશુ રસ પડે તેવા આપવા પ્રયત્ન કર્યો છે.

૩ તાર્કિક ભાગ.

પ્રથમ સિધ્ધાન્ત લંબની રચના કરી સાબીત કરવાથી શરૂ-આતમાં વિદ્યાર્થીઓને મુશ્કેલ પડે છે તેથી સરલકોણ (Straight angle) ની વ્યાખ્યા આપી, “ ભાગેનો સરવાળો આખાની બરાબર છે ” એ પ્રત્યક્ષ પ્રમાણની મદદ લઈને સરળ સાબીતી આપી છે. બીજા સિધ્ધાન્તની અનિષ્કાપત્તિ / Reductio-ad-absurdum) થી આપેલી સાબીતી શરૂઆતમાં ભાગ્યે જ કોઈ વિદ્યાર્થી સમજી શકે છે. આથી આ સિધ્ધાન્ત પણ સરળ કોણની મદદથી જ સાબીત કર્યો છે.

સમાન્તર રેખાઓ ઉપરનો સિધ્ધાન્ત પણ વિદ્યાર્થીઓને બહુ મજાસાવે છે. આ સિધ્ધાન્ત જરા માંડો લીધો છે અને સાબીતી વિદ્યાર્થીઓ સમજી શકે તેવી આપવા પ્રયત્ન કર્યો છે. આને આથી પણ માંડો લઈ શકાય; પણ તેના સત્યોથી દાખલા કરવામાં પડતી અનુકૂળતા લક્ષમાં લઈને તેની સાબીતી વિદ્યાર્થીઓ કેટલાક સિધ્ધાન્તો અને તે ઉપરના દાખલા ૧ કર્યા પછી સહેલાઈથી સમજી શકશે એમ ધારીને જ તે ત્યાં લેવામાં આવ્યો છે.

બહુકોણના અદરના અને બહારના કોણો સંબંધી સિધ્ધાન્ત ૬ મો લીધો છે તેને સમાન્તર ચતુષ્કોણના સિધ્ધાન્ત પછી પણ લઈ શકાય. તે ૮ માં સિધ્ધાન્તના ઉપસિધ્ધાન્ત તરીકે કે ઉપ-યોગી દાખલા તરીકે પણ લઈ શકાય. તેની પ્રતિજ્ઞામાં “ બહિર્વૃત ” (Convex) ” શબ્દને “ બહુકોણ ” પહેલાં પડતો મૂક્યો છે; કારણ કે તેનું સત્ય આન્તર્વૃત (Convex) બહુકોણને પણ લાગુ પડે છે. શિક્ષક તે તરફ વિદ્યાર્થીઓનું ધ્યાન ખેંચશે તો તેમાં તેમને રસ પડશે. સિધ્ધાન્ત સાબીત કરવા માટે તો સરળ આકૃતિ દોરવી એ જ સાફ છે અને તેથી સરળ આકૃતિ જ દોરી છે.

નિધાન (Locus) ના સિધ્ધાન્તો વિદ્યાર્થીઓને સમજવામાં અને શિક્ષકોને સમજાવવામાં ઘણી જ મુશ્કેલી પડે છે અને વિદ્યાર્થીઓને તે ઘણા અગત્યના સિધ્ધાન્તોનું યથાર્થ જ્ઞાન થતું નથી. ઘણા તો તેની વ્યાખ્યા પણ આપી શકતા નથી તો તેના ઉપયોગની તો વાત જ શી ! આ બાબત લક્ષમાં રાખી પુસ્તકની શરૂઆતથી જ એવા કેટલાક છુટા છવાયા દાખલાઓ આપવા પ્રયત્ન કર્યો છે કે જેથી વિદ્યાર્થીઓ નિધાનના સિધ્ધાન્તો શીખે ત્યાર પહેલાં તો તેમનામાં તેમનું સત્ય કસેલું હોય અને તેઓ તેના ઉપયોગ પણ કરતા હોય. વધારામાં નિધાનની રીતસર વ્યાખ્યા આપ્યા પહેલાં કેટલાક દાખલા આપ્યા છે અને સાબીતી પણ તેઓ સમજી શકે તેવી સ્પષ્ટ રીતે આપવા પ્રયત્ન કર્યો છે.

ક્ષેત્રજ્ઞાના સિધ્ધાન્તોમાં ધાર્મથેગોરસના સિધ્ધાન્ત સંબંધી ટુંકા ઇતિહાસ આપી ભારતવર્ષમાં તે સત્ય ઘણા પ્રાચીન કાળથી જાણીતું હતું અને ઉપયોગમાં લેવાતું તે સંબંધી ટુંકી હકીકત આપી છે. ભાસ્કરાચાર્યે આ સિધ્ધાન્તની બે રીતે તેમના બીજ ગણિતમાં સાબીતી આપી છે તે પણ આપવામાં આવી છે.

કેટલાક સિધ્ધાન્તોના ઉપસિધ્ધાન્તો અને વ્યત્યાસ સિધ્ધાન્તોમાં સમાવેશ કરી સાબીત કરેલા સિધ્ધાન્તોની સંખ્યામાં ઘટાડો કરવા પ્રયત્ન કર્યો છે. સઘળા સિધ્ધાન્તોની સાબીતી પુસ્તકમાં આપેલી હોય છે તો વિદ્યાર્થીઓ તે વર્ગમાં સમજવા પ્રયત્ન કરતા નથી અને સાબીતી ગોખે છે. ભુમિતિ તો માધ્યમિક શાળાનું તર્ક-શાસ્ત્ર છે અને તેથી તે શીખવા અને શીખવવામાં કેટલોક ફરજિયાત વિચાર કરવાની જરૂર પડે એ આવશ્યક છે.

૪ દાખલાઓ.

ધણા જ દાખલાઓથી વિદ્યાર્થીઓ અને શિક્ષકો ઉભયને કંટાળો આવે છે. આ પુસ્તકમાં દાખલાઓ ખડું નહિ પણ પૂરતા, સહેલા, વ્યાવહારિક, રસિક અને જેમનાં પરિણામ ભવિષ્યના કામમાં ઉપયોગી થાય તેવા આપવા પ્રયત્ન કર્યો છે.

૫ પરિભાષા.

ભૂમિતિની પરિભાષા સામાન્ય ભાષાથી કાંઈક જુદી હોય તો ધણી અનુકૂળતા થાય છે એવો અનુભવ આ પુસ્તક તૈયાર કરતાં થયો છે. સંસ્કૃત પરિભાષાથી આખા હિંદુસ્તાનમાં પારિભાષિક એકતા આવે, એક ભાષાનું પુસ્તક બીજી ભાષામાં પણ સમજી શકાય, તેના તે જ પારિભાષિક શબ્દોમાં તે બીજી ભાષામાં શીખી અને શીખવી શકાય અને તેના તે જ પારિભાષિક શબ્દો રાખી તેનું ભાષાન્તર પણ બીજી ભાષામાં થઈ શકે એ લક્ષ્યમાં રાખીને જ પરિભાષા મુખ્યત્વે સંસ્કૃત રાખી છે. સહેલા અને ટુંકા શબ્દો પસંદ કરવામાં આવ્યા છે.

આ પુસ્તક બંને તેટલું ઉપયોગી બનાવવા ટુંક સમયમાં યથા-શક્તિ કાંઈક થયું છે. અનુભવી શિક્ષકો તેમાં સુધારા વધારા સૂચવશે તો બીજી આવૃત્તિ વખતે તેમાં યોગ્ય ફેરફાર કરવામાં આવશે.

અરોતર એન્યુકેશન સોસાયટી, } લીખાભાઈ કુબેરભાઈ પટેલ.
આણંદ.

શિક્ષકોને સૂચનાઓ.

૧. ભૂમિતિમાં જરૂરનાં સધળાં સાધનોની પેટી લીધા સિવાય આવનાર વિદ્યાર્થીનિ વર્ગમાં દાખલ જ નહિ થવા દેવાનો રીવાજ રાખવો.

૨. વ્યાખ્યાઓ ગોખાવવાથી ભૂમિતિશિક્ષણનો હેતુ સફળ થતો નથી. યોગ્યચોગ્યતાની ચર્ચા કરી વ્યાખ્યાઓ વિદ્યાર્થીઓ વર્ગમાં તૈયાર કરે એ દૃષ્ટિયા લાયક છે. આ થયા પછી જુદા જુદા પ્રકારની આકૃતિઓ દોરી તે સંબંધી કેટલાક પ્રશ્નો પૂછી વ્યાખ્યાઓ બધા વિદ્યાર્થીઓના મનમાં બરાબર હસાવવા પ્રયત્ન કરવાથી કામ રસિક અને સંગીન બનશે.

૩. કોઈ પણ સિદ્ધાન્ત સાબીત કરતા પહેલાં જે સત્ય સાબીત કરવાનું હોય તે વિદ્યાર્થીઓ પાસે જુદા જુદા પ્રકારની આકૃતિઓ દોરાવી પ્રયોગથી શોધી કહાડવું.

૪. આ ઉપરથી વિદ્યાર્થીઓ પાસે જ સિદ્ધાન્તોની પ્રતિષ્ઠા તૈયાર કરાવવી.

૫. પ્રતિજ્ઞામાં આપેલું શું છે અને સાબીત કરવાનું શું છે તે વિદ્યાર્થીઓના મનમાં બરાબર હસાવવાથી સિદ્ધાન્ત સાબીત કરવાનું કામ સરળ બને છે.

૬. પાટીઆ ઉપર આકૃતિ દોરાવી વા દોરી સચક પ્રશ્નો પૂછી સિદ્ધાન્ત અને તેટલો વિદ્યાર્થીઓ પાસે જ સાબીત કરાવરાવવા પ્રયત્ન કરવા.

૭. સિદ્ધાન્ત શીખવ્યા પછી તે ઉપરના મનોયત્નના ધણાખરા દાખલા વિદ્યાર્થીઓ કરે ત્યાર પછી જ નવો સિદ્ધાન્ત શીખવવો.

૮. વિદ્યાર્થીઓ કાઈ પણ પ્રયત્ન બળે કરે નહિ તે પહેલાં તેમને કાંઈ શીખવવું નહિ.

૬. વિદ્યાર્થીઓને દાખલા ઘેરથી કરી લાવવાને આપવા. તેઓ કરી શકે નહિ એવા દાખલાની પણ આકૃતિ તો દોરી લાવે જ અને તે ઉપર વિચાર પણ અને તેટલો કરી લાવે એવો આમલ રાખવો. ૧૦. અને તેટલું કામ વિદ્યાર્થીઓ પાસેથી જ લેવું. જે શિક્ષક વર્ગમાં પેસે ત્યારથી બોલબોલ જ વા પાટીઆ ઉપર લખલખ જ કરે અને તે જે કરે તેમાં વિદ્યાર્થીઓને લાગ લેવા ન દે તેથી શિક્ષણનો હેતુ બરાબર સધાનો નથી. શિક્ષણનો હેતુ વિદ્યાર્થીઓની શક્તિઓ કેળવવાનો છે. થોડી મહેનતે ટૂંક વખતમાં વિદ્યાર્થીઓનાં મગજો હકીકતોથી ભરવાનો નથી.

૧૧. પ્રયત્ન કર્યા પછી ન આવડે તેવા દાખલા ઘણા થોડા વિદ્યાર્થીઓને આવડતા હોય તો પાટીઆ ઉપર ખીજઓને તે મમળવવા એકાદ વિદ્યાર્થીને કહેવું. તેઓ “ હાજી હા ” ન કરે તે માટે શીખવાયેલું તેઓ બરાબર સમજ્યા છે કે નહિ તે જાણવાને વારંવાર પ્રશ્નો પૂછવા.

૧૨. ઘણાને આવડતા હોય તેવા દાખલા તેઓ માંહે માંહે ન આવડનારને શીખવે તેમ કરવું. કોઇ કોઇ વખત કાયા વિદ્યાર્થી પાસે પણ પાટીઆ ઉપર આકૃતિ દોરાવી સૂચક પ્રશ્નો પૂછી દાખલાઓ કરાવવા પ્રયત્ન કરવા. આથી વિદ્યાર્થીઓની આત્મશ્રદ્ધા કેળવાશે અને કાયા વિદ્યાર્થીઓને પણ લાગશે કે બાબત તો સહેલી હોય છે પણ તેઓ તે કરવા પ્રયત્ન કરતા નથી માટે તેઓ તે કરી શકતા નથી. આમ કેટલીક વખત થવાથી જેને આ વિષયમાં ઓછો રસ પડતો હશે તેને પણ આ વિષય રસિક લાગશે.

૧૩. ઉપર કહેવાઇ ગયું તેમ શિક્ષક પોતે પાટીઆનું સેવન હદ ઉપરાંત ન કરે તે સાથે તે ખુરશીનું સેવન પણ બહુ ન કરે અને વિદ્યાર્થીઓ કામ કરતા હોય ત્યારે તે ક્વેરીતે કરે છે તે કરતા ફરતા બુલે અને તેમને માર્ગદર્શક થાય એ ઇચ્છવા લાયક છે.

વિદ્યાર્થીઓને સૂચનાઓ.

૧. સધળી આકૃતિઓ સ્વચ્છ અને માપસર દોરવી.
૨. એક જ રેખા ઉપર બે વખત પેન્સિલ ફેરવવી નહિ.
૩. ખિંદુઓમાં થઇને રેખા દોરવા માટે પેન્સિલનું અણિયું ખિંદુ ઉપર બરાબર આવે તેવી સ્થિતિમાં કાટપુણિયું બરાબર મૂક્યું છે કે નહિ તે તપાસ્યા પછી રેખા દોરવી.
૪. આકૃતિઓ ધણી નાની દોરવી નહિ.
૫. દરેક વિદ્યાર્થીએ ભૂમિતિ માટે અર્ધા કાગળના કદની એક સારી નોટ બાંધવી. પાનની પહોળાઇના $\frac{1}{4}$ ભાગનો હાંસીઓ રાખી તેમાં દરરોજના કામની શરૂઆતમાં મિતિ લખવી. વિદ્યાર્થીઓ ઉપરના ધોરણોમાં જય ત્યારે જરૂર પડતા વધારાના કાગળો ઉમેરી આ નોટનો જ ઉપયોગ કરે એ હિતાવહ છે.
૬. આકૃતિઓ દોરવામાં ગમે તે પ્રકારની આકૃતિ દોરવાની હોય ત્યારે ખાસ ધર્મવાળી આકૃતિ દોરવી નહિ. કોઇ પણ ત્રિકોણ દોરવાનો હોય ત્યારે સમભુજ, સમદ્વિભુજ, કે કાટપુણ્ય ત્રિકોણ દોરવો નહિ. કોઇ પણ ચતુષ્કોણ દોરવાનો હોય ત્યારે સમાન્તર ચતુષ્કોણ, લંબચોરસ કે ચોરસ દોરવો નહિ.
૭. આકૃતિઓનાં નામ આપવામાં નિયમ સાચવવાથી ધણી અનુકૂળતા થાય છે. ઘડિઆળના કાંટાની ગતિ વિરૂધ્ધ દિશામાં આકૃતિઓનાં નામ આપવાની ટેવ રાખવી.
- ત્રિકોણના સ, ર, ગ કોણોની સામેની ભુજાઓને નામ આપવામાં જ અનુક્રમે સ, ર, ગ, અક્ષરોનો ઉપયોગ કરવો; ગમે તેમ ઉપયોગ કરવો નહિ.

એકરૂપ ત્રિકોણોને નામ આપવામાં અનુક્રમે જે ભાગો સરખા હોય તે ક્રમ પ્રમાણે નામ આપવાં.

૮. કોઈ પણ કાર્ય કરવાને ખાસ કારણ ન હોય તો તે કરવું નહિ અને જે જે કાંઈ કરવામાં આવે તે માટે પ્રમાણ આપવાની ટેવ રાખવી.

૯. અકવાડિયામાં ઓછામાં ઓછા એક વખત તો શીખેલા બધા સિદ્ધાન્તો અને ઉપસિદ્ધાન્તોની પ્રતિષ્ઠાઓ યાદ કરી જવાથી પ્રમાણ આપવામાં ઘણી સરળતા થાય છે.

૧૦. સાખીતી આપતાં થઈ ગયેલા સિદ્ધાન્તોનું પ્રમાણ આપવામાં સિદ્ધાન્તોના નંબર આપવાની જરૂર નથી. આ માટે આ પુસ્તકમાં સિદ્ધાન્તો સાખીત કરવામાં થોડામાં થોડા શબ્દોમાં પ્રમાણ આપ્યાં છે તે પ્રમાણે પ્રમાણ આપવાં.

૧૧. સિદ્ધાન્તોના જેટલી જ અગત્ય મનોમતનોની છે. દાખલાઓ કરવામાં પહેલાં જાતે જ પ્રયત્ન કરવો અને ઘણા પ્રયત્ન પછી જ બીજા કોઈની મદદની જરૂર જણાય તો તે લેવી. યાદ રાખવું કે વધારે પ્રયત્ને મેળવેલું જ્ઞાન વધારે વખત ટકે છે. સ્વપ્રયત્નથી ઘણીજ ધીમી પ્રગતિ કરનાર પણ થોડા વખતમાં અજાયબ ફત્તેહ મેળવે છે.

૧૨. માપસર આકૃતિઓ દોર્યા પછી આપેલી સમાન બાબતો સમાન નિશાનીઓથી બતાવવી. આથી સાખીતી આપવામાં ઘણી અનુકૂળતા થાય છે.

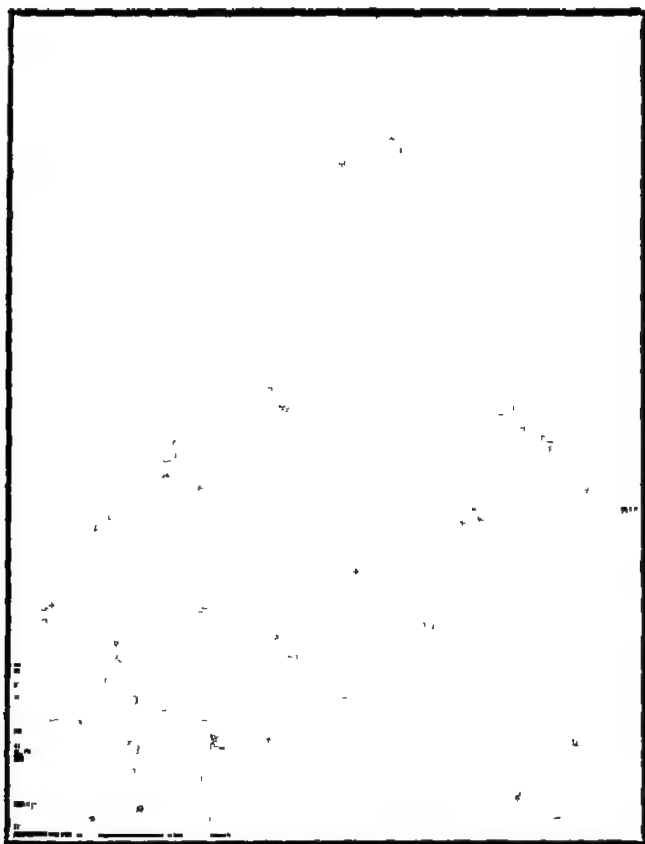
પરિભાષા

અચલ, સ્થિર	Constant, fixed	એકાત્મક	Identical
અનન્ત	Infinite	એક બિંદુગામી, સહગામી	Concurrent
અનિષ્ટાપતિ	Reductio-ad-absurdum	એક રૂપ	Congruent
અભિકોણ	Vertically opposite angle	એક રૂપતા	Congruency
અવકાશ	Space	અંતઃકેન્દ્ર	Incentre
અષ્ટકોણ	Octagon	અંતઃકોણ	Interior angle
અક્ષર	Letter	અંતર્ગત	Inscribed
આકૃતિ	Figure	અતર્ગત કોણ	Included angle
ઇ. ફ. इति कृतम्	Q. E. F.	અંતર્વૃત	Inscribed circle
ઇ. સિ. इति सिद्धम्	Q. E. D.	અંતરિત	Subtended
ઉચાઇ	Height	અંશ	Degree
ઉપકોણ	Adjacent angle	અંતરવુ	Subtend
ઉપસિદ્ધાન્ત	Corollary	કર્ણ	Hypotenuse
એકકેન્દ્ર	Concentric	કળા (અંશનો $\frac{1}{60}$ ભાગ)	Minute
એકકેન્દ્રવૃત	Concentric circle	કાટખુણો (મૂલકોણ)	Right angle
એકાકાર થવું	Coincide	કાટખુણ ત્રિકોણ	Right angled triangle
એકાન્તર	Alternate	કાટખુણિયું	Set square
એકાન્તર વૃતખંડ	Alternate Segment of a Circle	કૃત્ય	Problem
એકમ	Unit	કેન્દ્ર	Centre

કેન્દ્ર રેખા Line of centres	પરિગત વર્તુલ, } Circumscrib-
ક્રાંતિકોણ Complementary angle	પરિવૃત્ત } ed circle
કોણમાપક Protractor	પરિધિ Circumference
ખંડ Segment	પરિમાણ Dimension
ગુરુકોણ Obtuse angle	પરિમિતિ Perimeter
ગુરુકોણ ત્રિકોણ Obtuse angled triangle	પરિવૃત્ત Circumscribed
ગુરુત્વકેન્દ્ર Centroid	પક્ષ Data, hypothesis
ચતુષ્કોણ Quadrilateral	પાદ Foot of a perpendicular
આપ Arc	પાદિક Pedal
છેડો Extremity	પાયો Base
છેદક Secant	પૂરક Supplementary
જવા Chord	પૂરકકોણ Supplementary angle
તિર્થક્રેખા Transversal	પંચકોણ Pentagon
ત્રિકોણ Triangle	પ્રત્યક્ષ સાબીતી Direct proof
ત્રિજ્યા Radius	પ્રત્યક્ષ પ્રમાણ Axiom
દશભુજ Decagon	પ્રતિજ્ઞા Enunciation
દુભાગક Bisector	પ્રક્ષેપ Projection
ધર્મ Property	પૃષ્ઠ Surface
નવકોણ Nonagon	અહુકોણ Polygon
નિધાન Locus	અહિર્ગત વર્તુલ Escribed circle
પટ્ટી Ruler	બાહ્ય Exterior, External
પરિકર Compasses	બાહ્ય કેન્દ્ર Excentre
પરિકેન્દ્ર Circumcentre	બાહ્યકોણ Exterior angle
પરિગત Described about	

માપ્ય To be proved
 સાબીતી Proof
 સામાન્ય Common
 માપ્ય સમીકરણ Identity
 સિદ્ધાન્ત Theorem
 સુરેખ Rectilinear
 સુરેખા Straight line
 સ્થિતિ Position

સ્થિર Fixed
 સ્પર્શ રેખા Tangent /
 સ્પર્શબિંદુ Point of contact
 ક્ષેત્ર Plane surface or
 plane
 ક્ષેત્ર ભૂમિતિ Plane geometry
 ક્ષેત્રફળ Area



યુક્લિડ
મહાન ગ્રીક ગણિતશાસ્ત્રી
ઈ. સ. પૂ. ૩૦૦

અવેનર પ્રિન્ટિંગ પ્રેસ-આણંદ.

તાર્કિક ભૂમિતિ ભાગ ૨

પુસ્તક ૧

પ્રકરણ ૧

પ્રત્યક્ષપ્રમાણો, સ્વીકૃત્યો, વગેરે.

પદાર્થોનાં કદ, આકાર અને સ્થિતિ સંબંધી ચર્ચા કરનાર શાસ્ત્રને ભૂમિતિ^x કહે છે.

એક જ ક્ષેત્રમાં આવેલાં બિંદુઓ, રેખાઓ અને આકૃતિઓના ધર્મો સંબંધી ચર્ચા કરનાર શાસ્ત્રને ક્ષેત્રભૂમિતિ કહે છે.

પ્રથમ ભાગમાં આપણે ભૂમિતિનાં સાધનોનો ઉપયોગ કરીને કેટલાંક સત્યો સંબંધી અનુમાન કર્યાં હવે આપણે સાધનોની મદદ સિવાય તર્કથી ભૂમિતિનાં સત્યો સમાન ધર્મની સર્વ આકૃતિઓમાં સત્ય હોવાં જ જોઇએ એ સાબીત કરીશું. આપણે હરેક વખત ભૂમિતિનાં સાધનો આપણી સાથે રાખતા નથી, કેટલીક બાબતોમાં તો સાધનો અને તે વાપરનાર માણસ ચોક્કસ હોય નહિ તો પરિણામ ઉપર વિશ્વાસ પણ રાખી શકાય નહિ. આવી જગ્યાએ આપણને તર્કથી અમુક સત્યનો ઉપયોગ કરવાની જરૂર પડે છે. કોઇ કોઇ વખત આપણને વા બીજા કોઇને કોઇ સત્ય સંબંધી શંકા થાય તો તર્કથી શંકાનું સમાધાન થઇ શકે છે. આ રીતે ક્રિયાત્મક ભૂમિતિ કરતાં પણ તાર્કિક ભૂમિતિ વધારે ઉપયોગી છે.

^x ભૂ=પૃથ્વી, મિતિ=માપણી. પૃથ્વી ઉપરનાં અંતરો અને નાના પ્રકારની આકૃતિઓ માપવાની વિદ્યા. આને રેખાગણિત પણ કહે છે.

તાકિંદ્ર ભૂમિતિમાં જાનતો સરખી દેખાતી હોય વા માપવાથી સરખી થતી હોય તે ઉપરથી બીજા કોઇ ભૂમિતિના પ્રમાણ સિવાય તે સમાન છે એમ આપણે કહી શકીએ નહિ. પ્રમાણ સિવાયનું કોઇ પણ સત્ય તર્કમાં સ્વીકારી શકાય નહિ. પ્રમાણો આપવામાં આપણે વ્યાખ્યાઓ, પ્રત્યક્ષપ્રમાણો, અને સાબીત કરેલાં સત્યોનો ઉપયોગ કરીશું.

પ્રત્યક્ષપ્રમાણો.

કોઇ પણ ગાત્રની ચર્યામાં કેટલાંક સર્વમાન્ય સહેલાં સત્યો સ્વીકાર્યા સિવાય આપણે ચચા કરી નિર્ણય કરી શકતા નથી. ભૂમિતિમાં પણ આવાં કેટલાંક સત્યો સ્વીકારવાની જરૂર છે. આથી દરેક વિચારશીલ પુરૂષ ચર્યા સિવાય સ્વોકારે તેવાં કેટલાંક સરળ સત્યોને પ્રત્યક્ષપ્રમાણ તરીકે સ્વીકારવામાં આવે છે. વ્યાવહારિક જીવનમાં તેમને માટે સાબીતીની જરૂર નથી. આ સત્યો નીચે પ્રમાણે છે.

૧ જે વસ્તુઓ બીજી કોઇ એક વસ્તુ સમાન હોય, તે સમાન છે.

૨ સમાનમાં સમાન વસ્તુઓ ઉમેરીએ, તો સરવાળા સમાન થાય.

૩. સમાનમાંથી સમાન બાદ કરીએ, તો બાદબાકી સમાન થાય.

૪. સમાનને સમાને ગુણીએ, તો ગુણાકાર સમાન થાય.

૫. સમાનને સમાને ભાગીએ, તો ભાગાકાર સમાન થાય.

૬. આખું તેના ભાગથી વધારે છે,

૭. અસમાન વસ્તુઓમાં સમાન વસ્તુઓ ઉમેરવામાં આવે વા તેમાંથી બાદ કરવામાં આવે, તો પરિણામે નાની વસ્તુ નાની અને મોટી વસ્તુ મોટી રહે છે.

૮. કોઈ પણ રેખા, કોણુ વા આકૃતિ તેની જગાએથી લઇને તેના કદ અને આકારમાં ફેર કયાં સિવાય, ખીજી રેખા, કોણુ વા આકૃતિ ઉપર મૂકવાથી તે સાથે એકાકાર થઇ જાય, તો તે બન્ને પ્રમાણ છે.

૯. બે સુરેખાઓ અવકાશ ઘેરી શકતી નથી.

૧૦. સઘળા સરલકોણો અને કાટખુણાઓ સમાન છે.

૧૧. આપેલા બિંદુમાંથી આપેલી સુરેખાને સમાન્તર દ્વિત એક ૪ સુરેખા દોરી શકાય. (પ્લેકેરનુ પ્રત્યક્ષપ્રમાણુ.)

સ્વીકૃત્યો.

સિદ્ધાન્તો સાબીત કરવામાં જરૂરની રચનાઓ કરવાની છુટ છે. આ માટે જે રચનાઓ કરવાનો સ્વીકાર થયેલો છે તેમને સ્વીકૃત્યો હોય છે. તે નીચે પ્રમાણે છે.

૧. બે બિંદુઓમાં થઇને એક સુરેખા દોરી શકાય

૨. સુરેખા બન્ને બાજુ ગમે તેટલી લંબાવી શકાય.

૩. કોઈ એક બિંદુને કેન્દ્ર લઈ કોઈ પણ ત્રિજ્યાથી વર્તુલ દોરી શકાય.

૪. આપેલી મોટી સુરેખામાંથી નાની સુરેખા જોડેલો ગમે તે કોઈ ભાગ કાપી શકાય.

૫. આપેલી સુરેખાને કોઈ પણ બિંદુ આગળ લંબ દોરી શકાય.

૬. સુરેખાઓ બિંદુઓથી અને કોણો સુરેખાઓથી ફભાગી શકાય.

૭. આપેલી સુરેખાના કોઈ એક બિંદુ આગળ આપેલા કોણ સમ્પર કોણુ બનાવવાને સુરેખા દોરી શકાય.

સિદ્ધાન્તો. x

ભૂમિતિનાં સત્યોની ચર્ચાના સિધ્ધાન્તોના પ્રમેય સિદ્ધાન્તો અને કૃત્ય સિદ્ધાન્તો એવા બે ભાગ પાડવામાં આવ્યા છે.

પ્રમેય સિદ્ધાન્તોમાં મુખ્યત્વે સત્યો સાબીત કરવાનાં હોય છે અને રચના કરવાની હોય છે તો તે સાબીતી પૂરતી જ હોય છે.

કૃત્ય સિદ્ધાન્તોમાં રચના મુખ્ય અને સાબીતી ગૌણ હોય છે.

દરેક સિદ્ધાન્તના પાંચ ભાગમાં નીચે જણાવેલી આવતોનો સમાવેશ થાય છે.

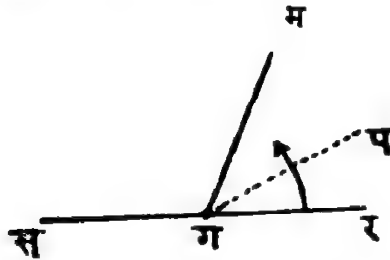
૧. પ્રતિજ્ઞામાં સિદ્ધાન્તનું સત્ય સામાન્ય શબ્દોમાં દર્શાવાય છે.
૨. પક્ષમાં આપેલી આવતો અમુક આકૃતિને લગતા શબ્દોમાં દર્શાવાય છે.
૩. સાધ્યમાં સાબીત કરવાની આવતો આકૃતિને લગતા શબ્દોમાં દર્શાવવામાં આવે છે.
૪. રચનામાં સત્ય સાબીત કરવા માટે જરૂરની રચના કરવામાં આવે છે.
૫. સાબીતીમાં સિદ્ધાન્તનું સત્ય પ્રમાણુ આપી સાબીત કરવામાં આવે છે.

x “ પ્રમેય સિદ્ધાન્ત ” માટે “ સિદ્ધાન્ત ” અને “ કૃત્ય સિદ્ધાન્ત ” માટે “ કૃત્ય ” શબ્દો રૂઢ થઈ ગયેલા હોવાથી આ પુસ્તકમાં તેમને માટે “ સિદ્ધાન્ત ” અને “ કૃત્ય ” શબ્દોનો જ ઉપયોગ કર્યો છે.

૧

પ્રકરણ ૨
બિંદુ આગળના કોણો
સિદ્ધાન્ત ૧

એક સુરેખા ઉપર બીજી સુરેખા પડે તો બે ઉપકોણોના સરવાળો બે કાટખુણા બરાબર થાય.



પક્ષ: ગમ સુરેખા સર સુરેખા ઉપર પડી તે સાથે રગમ અને મગસ કોણો બનાવે છે.

સાધ્ય: $\angle \text{રગમ} + \angle \text{મગસ} = ૨ \text{ કાટખુણા} = ૧૮૦^\circ$.

સાબીતી: ધારો કે એક ગપ સુરેખા ગર માંથી નીકળી આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે દિશામાં ફરીને ગસ સુરેખામાં મળી જાય છે, તેટલામાં $\angle \text{રગમ}$ અને $\angle \text{મગસ}$ કોણો બનાવે છે અને $\angle \text{રગસ}$ સરકોણુ બને છે.

$$\therefore \angle \text{રગમ} + \angle \text{મગસ} = \angle \text{રગસ} \\ = ૨ \text{ કાટખુણા} = ૧૮૦^\circ$$

ઉપસિદ્ધાન્તઃ સાખીત કરેલા સિદ્ધાન્ત ઉપરથી સહેજાઇથી નીકળી આવતા સિદ્ધાન્તને ' ઉપસિદ્ધાન્ત ' કહે છે.

ઉપસિદ્ધાન્તઃ ૧ એ સુરેખાઓ પરસ્પર છેદે તો તેમનાથી અનેકા ચાર કાણેનો સરવાળો ચાર કાટખુણા ઝરાઝર થાય.

૨. ગમે તેટલી સુરેખાઓ એકજ બિંદુમા આવી મળે તો બિંદુ આગળ થતા અથવા કાણેનો સરવાળો ચાર કાટખુણા ઝરાઝર થાય.

મનોયત્ન ૧

૧. સિદ્ધાન્ત ૧ ના ઉપસિદ્ધાન્તો સિદ્ધાન્તનું પ્રમાણુ લઇને અને સ્વતંત્ર રીતે સાખીત કરો.

૨. “ પ્રકકાણો ” વાપરીને પહેલા સિદ્ધાન્તની પ્રતિષ્ઠા બોલો.

૩. પહેલા અને ત્રીજા સિદ્ધાન્તની આકૃતિઓમા પ્રકકાણોના નામ આપો.

૪. એક સુરેખા બીજી સુરેખાને કાટખુણે છેદે તો બાકીના કાણો પણ કાટખુણા છે એ સાખીત કરો.

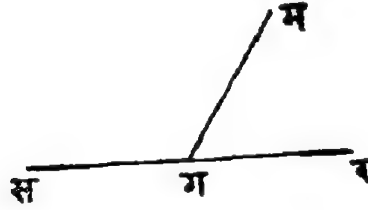
૫. સરખા કાણોના કાટિકાણ અને પ્રકકાણો મળ્યા છે.

૬. સર, સગ, અને સમ સુરેખાઓ સ માંથી દોરેલી છે. \angle રસગ ને સપ અને \angle ગસમ ને સધ સુરેખાઓ દ્વારા છે. સાખીત કરો: \angle પસધ $= \frac{1}{2} \angle$ રસમ

૭. એક સુરેખા ઉપર બીજી સુરેખા પડે તો ઉપકાણોને દ્વારાગ નારી સુરેખાઓ પરસ્પર લંબ છે.

સિદ્ધાન્ત ૨

જો બે ઉપકોણોનો સરવાળો બે કાટખુણા બરાબર થાય, તો તેમની બહારની ભુજાઓ એક જ સુરેખામાં છે.



પક્ષ : \angle રગમ + \angle મગન = બે કાટખુણા.

સાધ્ય : રગ અને ગસ એક જ સુરેખામાં છે,

સાબીતી : \angle રગમ + \angle મગસ = \angle રગસ

અને \angle રગમ + \angle મગસ = બે કાટખુણા પક્ષ

$\therefore \angle$ રગસ = બે કાટખુણા.

$\therefore \angle$ રગસ સરલકોણ છે.

\therefore રગસ સુરેખા છે.

\therefore રગ અને ગસ એક જ સુરેખામાં છે.

ઉપસિદ્ધાન્ત : એક જ બિંદુ આગળ અનંતા ત્રણ અથવા વધારે

કોણોનો સરવાળો બે કાટખુણા બરાબર થતો હોય, તો

તેમની બહારની ભુજાઓ એક જ સુરેખામાં હોય.

વ્યત્યાસ : જો બે સિદ્ધાન્તોમાં એકનો પક્ષ બીજાનું સાધ્ય

અને એકનું સાધ્ય બીજાનો પક્ષ હોય, તે અન્ને

સિદ્ધાન્તો પરસ્પર વ્યત્યાસ સિદ્ધાન્તો કહેવાય છે.

[સૂચના : વ્યત્યાસ = ઉલટો. કોઈ પણ સિદ્ધાન્તનો વ્યત્યાસ

સિદ્ધાન્ત હોઈ શકે છે; પણ સિદ્ધાન્ત સત્ય હોય તે ઉપરથી તેનો

વ્યત્યાસ હંમેશાં સત્ય જ હોય એમ નથી.]

મનોચત્ન ૨

૧. સરગ સુરેખાના ર જિંદુમાંથી રમ અને રપ, સગ તી વિરક્ષ બાબુઓ ઉપર \angle સરમ = \angle ગરપ બનાવે, તો મરપ સુરેખા છે, એ સાબીત કરો.

૨. મસ, મર અને મગ નામની ત્રણ સુરેખાઓ મ જિંદુમાંથી દોરેલી છે. મપ, \angle સમર ને અને મધ \angle રમગ ને દુલાગે છે. જો \angle પમધ એ કાટખુણો હોય તો સમગ સુરેખા છે.

૩. એક સુરેખા ઉપર સ, ર, ગ અને મ ચાર જિંદુઓ હોય અને સગ = રમ હોય, તો સર = ગમ.

૪. સ, ર, ગ, જિંદુઓ એક સુરેખા ઉપર આવેલાં છે. \angle મગસ = \angle પરગ થાય એ રીતે સમ અને રપ સુરેખાઓ દોરેલી છે. સાબીત કરો: \angle મસગ + \angle પરસ = ૨ કાટખુણા.

૫. ઉપરના પ્રશ્નમાં મસ ને ધ સુધી લંબાવી સાબીત કરો: \angle ધસર = \angle પરસ.

સિદ્ધાન્ત ૩

૧

એ સુરેખાઓ પરસ્પર છેદે, તો અભિક્ષણો સરખા થાય.



પક્ષ : સર અને ગમ સુરેખાઓ પરસ્પર પ બિંદુમાં છેદે છે.

સાધ્ય : \angle સપગ = \angle મપર; \angle સપમ = \angle ગપર.

સાધીતી : \angle સપગ + \angle સપમ = ૨ કાટખુણા. \therefore ગમ સુરેખા

\angle સપમ + \angle મપર = ૨ કાટખુણા. \therefore સર

$\therefore \angle$ સપગ + \angle સપમ = \angle સપમ + \angle મપર.

\angle સપમ અન્ને બાજુમાં સામાન્ય છે.

$\therefore \angle$ સપગ = \angle મપર.

આ જ પ્રમાણે \angle સપમ = \angle ગપર સાધીત થાય.

મનોયત્ન ૩

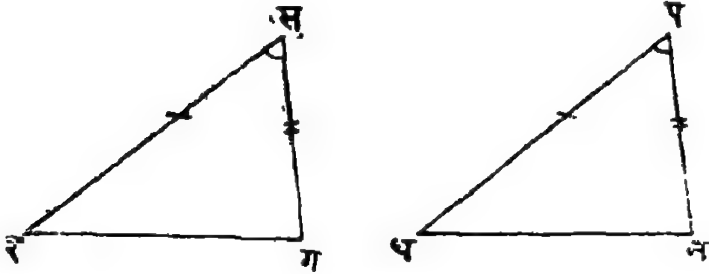
૧. ઉપરની આકૃતિમાં સાધીત કરો: \angle સપમ = \angle ગપર.
૨. સિદ્ધાન્તના અભ્યાસની પ્રતિજ્ઞા લખો અને તે સાધીત કરો.
૩. કોઈ પણ ત્રિકોણની સઘળી બુજાઓ અન્ને દિશામાં લંબાવી સરખા કાણો સરખી નિશાનીઓથી બતાવો.
૪. સિદ્ધાન્તની આકૃતિમાં પધ, \angle સપગ ને દુભાગે, તો ધપ લંબાવવાથી \angle મપર પણ દુભાગાય.
૫. અભિક્ષણોને દુભાગનારી રેખાઓ એક જ સુરેખામાં છે.

પ્રકરણ ૩

ત્રિકોણો

સિક્કાન્ત ૪

એક ત્રિકોણની બે બાજુઓ અને અંતર્ગતકોણ બીજા ત્રિકોણની બે બાજુઓ અને અંતર્ગતકોણ બરાબર હોય, તો બન્ને ત્રિકોણો એકરૂપ છે.



પક્ષ : Δ સરગ અને Δ પઘન માં

સર = પઘ, સગ = પન, અને \angle રસગ = \angle ધપન.

સાધ્ય : Δ સરગ \equiv Δ પઘન.

સાબીતી : Δ સરગ ને Δ પઘન ઉપર એવી રીતે મૂકો કે સ, પ ઉપર પડે અને સર, પઘ ઉપર પડે.

\therefore સર = પઘ

પક્ષ.

\therefore ર, ધ માં અને સર, પઘ માં મળી જાય છે.

અને $\therefore \angle$ રસગ = \angle ધપન

પક્ષ.

\therefore સગ, પન ઉપર પડે છે.

૧. મળી :: સગ = પન પક્ષ,
 ∴ ગ, ન માં અને સગ, પન માં મળી જાય છે.
 હવે :: ર, ધ માં અને ગ, ન માં મળે છે. સાખીત કર્યું.
 ∴ રગ, ધન માં મળી જાય છે.
 ∴ Δ સરગ, Δ પધન સાથે એકાકાર થાય છે.
 ∴ Δ સરગ \equiv Δ પધન.

સૂચના : (ક) આ મિદ્ધાન્ત ઉપરથી સાખીત થાય છે કે
 \angle ર = \angle ધ, \angle ગ = \angle ન અને રગ = ધન.

(ખ) જે કોણો સરખા માખીત થાય છે તે આપેલી સરખા
 બુજાઓની સામેના કોણો છે.

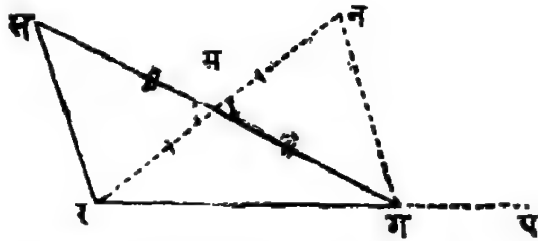
(ગ) એક ઉપર બીજા ત્રિકોણ મૂકી ત્રિકોણની એકરૂપતા
 સાખીત કરવામાં યાદ રાખવું કે ત્રિકોણો ગમે તે સ્થિતિમાં
 આવેલા હોય તો પણ સરખી રેખા ઉપર જ સરખી રેખા
 અને સરખા કોણ ઉપર જ સરખો કોણ પડે તેવી રીતે એક
 ત્રિકોણ ઉપર બીજાને મૂકેલા.

મનોચત્ન ૪ ક

૧. સમદ્વિબુજ ત્રિકોણમાં સમબુજાઓના અંતર્ગતકોણને દુભાગ-
 નારી રખા (ક) પાયાને લંબ છે, અને (ખ) પાયાને દુભાગે છે.
૨. સમદ્વિબુજ ત્રિકોણના પાયાના કોણો સરખા છે.
૩. કોઈ પણ ત્રિકોણમાં મધ્યગા પાયાને લંબ હોય, તો ત્રિકોણ
 સમદ્વિબુજ છે.
૪. સર ના મધ્ય બિંદુ સ માંથી મલ લંબ દોરવામાં આવે.
 તો મલ ઉપરનું કોઈ પણ બિંદુ સ અને ર થી સમાન અંતરે છે

સિદ્ધાન્ત ૫

ત્રિકોણની એક બુજ લખાવીએ તો આલંકોણ કોઈ પણ દરના
અતઃકોણથી મોટો છે



પક્ષ : \triangle સરગ ની રગ બુજ પ સુધી લખાવો.

સાધ્ય : \angle સગપ $>$ \angle ગસર અથવા \angle સરગ

રચના : મ, સગ નું મધ્યબિંદુ લેયો. રમ જોડો અને મન
= રમ થાય ત્યાં સુધી રમ લખાવો. ગન જોડો.

સાબીતી : \triangle મરસ અને \triangle મનગ માં.

સમ = મગ, રમ = મન

\angle સમર = \angle ગમન

રચના
અલંકોણો,

$\therefore \triangle$ મરસ $\equiv \triangle$ મનગ.

$\therefore \angle$ મગન = \angle મસર.

હવે $\therefore \angle$ સગપ $>$ \angle મગન,

$\therefore \angle$ સગપ $>$ \angle મસર.

$\therefore \angle$ સગપ $>$ \angle ગસર.

આ જ પ્રમાણે રગ નું મધ્યબિંદુ લઈ \angle સગપ $>$ \angle સરગ
સાબીત કરી શકાય.

૧

મનોયત્ન ૫

૧. આ મિહાન્તની આદૃતિમાં \angle સગપ $>$ \angle સરગ સ્વ-
તત્ત્વ રીતે સાબીત કરો.

૨. Δ સરગ ની અદર કોઈ એક મ બિંદુ હોયો. રમ અને
ગમ જોડો. રમ, સગ ને પ માં મળે ત્યાં સુધી લખાવો. સાબીત
કરો કે \angle રમગ $>$ \angle સ.

૩. ત્રિકોણની અદરના કોઈ એક બિંદુ આગળ પાયાથી અંત-
રિત કોણ શિરકોણ કરનાં મોટા છે.

મનોયત્ન ૪ ખ

૧. મસ અને મગ, મ માંથી દોરેલી રેખાઓ છે. મન,
 \angle સમગ ને દુભાગે, તો મન ઉપરનું કોઈ પણ બિંદુ મસ અને
મગ થી સરખે અંતરે છે.

૨. ત્રિકોણની બે ભુજાઓનાં મધ્યબિંદુઓમાંથી તે જ ભુજાઓને
લંબ દોર્યા હોય, તો બન્ને લંબ બે બિંદુમાં મળે તે બિંદુ ત્રિકોણ-
નાં ત્રણે શિરોબિંદુઓથી સરખે અંતરે છે.

૩. Δ સરગ માં સર = સગ છે. સર અને સગ માંથી
અનુક્રમે સપ = સધ કાપી લઈએ, તો રધ = ગપ થાય.

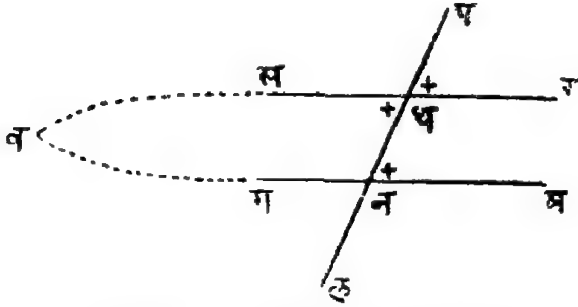
૪. સરગમ ચતુષ્કોણનો રમ વિકર્ણ છે. સર = મગ અને
 \angle સરમ = \angle રમગ હોય, તો સાબીત કરો: \angle સ = \angle ગ
અને સમ = રમ.

૫. Δ સરગ ની ત્રણે ભુજાઓ ઉપર સમભુજ Δ ઓ
સરપ, રગધ અને ગસન તેમનાં શિરોબિંદુઓ બહારની બાજુ પડે
તેવી રીતે દોર્યા છે. સાબીત કરો : સધ = રન = ગપ.

પ્રકરણ ૪
સમાન્તર રેખાઓ
શિક્ષાન્ત ૬

એક મુરેખા બીજી એ મુરેખાઓને છેદે અને

૧. વ્યુત્ક્રમકોણો સરખા બનાવે,
 ૨. સગતકોણો સરખા બનાવે, અથવા
 ૩. છેદકરેખાની એક બાજુના અંતઃકોણોનો મરવાનો
એ કોટબુણો અડધર થાય.
- તો તે એ મુરેખાઓ સમાન્તર છે.



૧. પક્ષ : પલ, સર અને ગમ ને ધ, ન માં છેદે છે અને
∠ સધન અને ∠ ધનમ વ્યુત્ક્રમકોણો સરખા બનાવે છે.

સાધ્ય : સર || ગમ.

સાબીતી : જો સર અને ગમ સમાન્તર ન હોય તો તેઓ ડાબી
કે જમણી બાજુએ સંઘાતવાદી કોણ જગાએ મળવી જોઈએ.
ધારે કે ડાબી બાજુએ સંઘાતવાદી તે આકૃતિમાં બતાવ્યા
પ્રમાણે વ માં મળે છે અને ધનવ ત્રિકોણ બનાવે છે

૧. \therefore અહારનો \angle ધનમ $>$ અંદરના દૂરતા \angle નધવ. પણ
પક્ષ પ્રમાણે આ અન્ને કોણો સરખા છે.
 \therefore સર અને ગમ રેખાઓ કાળી આજીએ લંબાવવાથી
મળાવી જોઈએ નહિ.
તેમને જમણી આજીએ લંબાવવામાં આવે તો પણ તે મળે
નહિ એ ઉપર પ્રમાણે સાબીત કરી શકાય.
 \therefore સર અને ગમ અન્ને આજીએ લંબાવવાથી મળે નહિ.
 \therefore સર \parallel ગમ.

૨. પક્ષ : \angle પધર = મંગત \angle ધનમ.

સાધ્ય : સર \parallel ગમ.

સાબીતી : \angle પધર = અભિ \angle સધન.

અને \angle પધર = મંગત \angle ધનમ. પક્ષ.

$\therefore \angle$ સધન = \angle ધનમ.

અને આ વ્યુત્ક્રમકોણો છે,

\therefore સર \parallel ગમ.

૩. પક્ષ : \angle રધન + \angle ધનમ = ૨ કા. ખુ.

સાધ્ય : સર \parallel ગમ.

સાબીતી : \angle રધન + \angle સધન = ૨ કા. ખુ. \therefore સર સુરેખા.

\angle રધન + \angle ધનમ = ૨ કા. ખુ. પક્ષ.

$\therefore \angle$ રધન + \angle સધન = \angle રધન + \angle ધનમ.

$\therefore \angle$ સધન = \angle ધનમ.

અને આ વ્યુત્ક્રમકોણો છે,

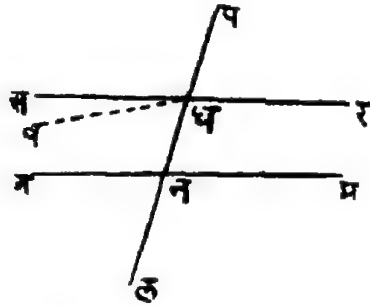
\therefore સર \parallel ગમ.

મનોયતન ૬

૧. છદ્દા સિદ્ધાન્તના (૨) અને (૩) ભાગ (૧) ની મદદ લીધા સિવાય સામ્યીત કરો.
૨. જો બે સુરેખાઓ ત્રીજી સુરેખાને લંબ હોય, તો તે બે સમાન્તર છે.
૩. ચતુષ્કોણના કોણો પરસ્પર દુભાગે. તો તે * સમાન્તર-ચતુષ્કોણ છે.

સિદ્ધાન્ત ૭

એક સુરેખા બે સમાન્તર સુરેખાઓને છેદે, તો (૧) વ્યુત્ક્રમકોણો સરખા, (૨) મગતકોણો સરખા (૩) અને છેદકરેખાના એક ખાબુના અંદરના બે કોણોનો સરવાળો બે કાટખુણા બરાબર થાય.



પક્ષ : પલ, સર અને ગમ || સુરેખાઓને ધ અને ન બિંદુઓમાં છેદે છે.

* જો ચતુષ્કોણની સામેની બુજઓ સમાન્તર હોય તેને સમાન્તરચતુષ્કોણ કહે છે.

- સાધ્ય : ૧. \angle સધન = \angle ધનમ; \angle રધન = \angle ધનગ,
 ૨. \angle રધપ = \angle ધનમ, \angle સધપ = \angle ધનગ,
 ૩. \angle રધન + \angle ધનમ = \angle સધન + \angle ધનગ = ૧૮૦° .
- સાખીતી : ૧. જો \angle સધન = \angle ધનમ ન હોય તો ધારો કે
 \angle વધન = વ્યુ. \angle ધનમ થાય તેમ વધ દોરી છે.
 \therefore વધ \parallel ગમ.
 પણ સર \parallel ગમ પક્ષ.
 \therefore એક પિંદુમાં મળતી સધ અને વધ અન્ને સુરેખાઓ
 ગમ ને સમાન્તર હોતી જોઈએ.
 પણ પ્લેફેરના પ્રત્યક્ષ પ્રમાણ મુજબ આ અશક્ય છે.
 \therefore \angle સધન અને \angle ધનમ સરખા ન હોય એ અશક્ય છે.
 \therefore \angle સધન = વ્યુ \angle ધનમ.
 આ જ પ્રમાણે \angle રધન = \angle ધનગ સાખીત કરી શકાય.
 ૨. \angle સધન = અધિ. \angle રધપ,
 અને \angle સનધ વ્યુ. \angle ધનમ. સિધ્ધ કર્યું.
 \therefore \angle રધપ = સંગત \angle ધનમ.
 આ જ પ્રમાણે \angle સર્વપ = સંગત \angle ધનગ સાખીત કરી શકાય.
 ૩. \angle રધન + સધન = ૧૮૦° \therefore સર સુરેખા.
 અને \angle સધન = વ્યુ. \angle ધનમ.
 \therefore \angle રધન + \angle ધનમ = ૧૮૦° .
 આ જ પ્રમાણે \angle સધન + \angle ધનગ = ૧૮૦° સાખીત કરાય.
- ઉપસિદ્ધાન્ત : ૧. એ અથવા વધારે સમાન્તર સુરેખાઓને છેદતી
 સુરેખા જો એકને લાંબ હોય તો તે બધી સમાન્તર સુરેખા-
 ઓને પણ લાંબ હોય.
 ૨. એક સુરેખાને સમાન્તર સુરેખાઓ પરસ્પર સમા-
 ન્તર છે.

મનોયત્ન ૭

૧. સિદ્ધાન્ત ૭ ના (૨) અને (૩) ભાગ, (૧) ની મદદ લીધા સિવાય સાખીત કરો.

૨. ચતુષ્કોણની સામેની ભુજાઓ સમાન્તર હોય અને એક કોણ કાટખુણો હોય, તો તેના બધા કોણ કાટખુણા હોવા જોઈએ.

૩. ચતુષ્કોણની સામેની ભુજાઓ સમાન્તર હોય, તો સામેના કોણો સરખા હોવા જોઈએ.

૪. સરગમ ચતુષ્કોણમાં સર અને મગ સરખી અને સમાન્તર હોય, તો રમ વિકર્ણ ચતુષ્કોણને દુભાગે છે.

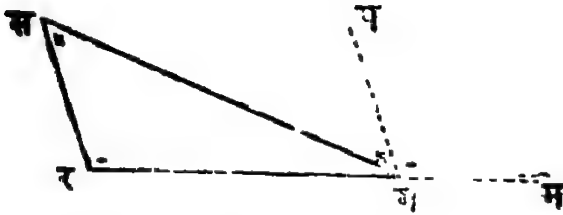
૫. ત્રિકોણના બહારના કોણને દુભાગનારી રેખા તેની સામેની ભુજાને સમાન્તર હોય, તો ત્રિકોણના બે કોણો સરખા હોવા જોઈએ.

૬. કોઈ પણ ત્રિકોણના શિરોબિંદુમાંથી પાયાને સમાન્તર રેખા દોરી સિદ્ધ કરો કે ત્રિકોણના એકરના ત્રણ કોણોનો સરવાળો બે કાટખુણા બરાબર થાય છે.

૭. એક ત્રિકોણનાં બે શિરોબિંદુઓમાંથી તેમની સામેની ભુજાઓને સમાન્તર રેખાઓ દોરી ચતુષ્કોણ પૂરો કરી સાખીત કરો કે ચતુષ્કોણના બે પાસેના કોણો મળી બે કાટખુણા બરાબર થાય છે.

સિદ્ધાન્ત ૮

કોઈ પણ ત્રિકોણના ત્રણે અંતઃકોણો મળાને એ કાટખુણા બરાબર થાય છે.



પક્ષ : \angle રસગ, \angle ગરસ અને \angle સગર, \triangle સરગના અંતઃકોણો છે.

સાધ્ય : \angle રસગ + \angle ગરસ + \angle સગર = 180° .

રચના : રગ ને મ સુધી લંબાવો.
ગ માંથી ગપ \parallel રસ દ્વારા.

સાબીતી : $\left. \begin{array}{l} \angle \text{રસગ} = \text{વ્યુ. } \angle \text{સગપ} \\ \angle \text{ગરસ} = \text{સં. } \angle \text{મગપ} \end{array} \right\} \therefore \text{ગપ} \parallel \text{રસ રચના.}$

$\therefore \angle \text{રસગ} + \angle \text{ગરસ} = \angle \text{સગપ} + \angle \text{મગપ} = \angle \text{સગમ.}$

\angle સગર બન્ને બાજુ ઉમેરો,

$\therefore \angle \text{રસગ} + \angle \text{ગરસ} + \angle \text{સગર} = \angle \text{સગમ} + \angle \text{સગર.}$

પણ $\angle \text{સગમ} + \angle \text{સગર} = 180^\circ \therefore$ રમ સુરેખા.

$\therefore \angle \text{રસગ} + \angle \text{ગરસ} + \angle \text{સગર} = 180^\circ.$

ઉપસિદ્ધાન્તો :

૧. કાષ્ઠ પણ ત્રિકાણની એક ભુજ લખાવી હોય તો અક્ષરનો કાણુ દૂરના એ અંતઃકાણોની બરાબર છે.
૨. કાષ્ઠ પણ ત્રિકાણના એ અંતઃકાણો મળીને એ કાટખુણા કરતાં ઓછા છે.
૩. કાષ્ઠ પણ ત્રિકાણમાં ઓછામાં ઓછા એ અંતઃકાણો લઘુકાણુ હોય છે.
૪. કાષ્ઠ એ ત્રિકાણમાં એકના એ કાણો ખીખના એ કાણો સમાન હોય તો ત્રીજા કાણો પણ સમાન છે.
૫. કાષ્ઠ પણ ત્રિકાણના એ કાણોનો સરવાળો એક કાટખુણા બરાબર થાય, તો તે ત્રિકાણ કાટખુણુ ત્રિકાણ છે અને તેનો વ્યત્યાસ.
૬. કાષ્ઠ પણ એક અક્ષરના બિંદુમાંથી એક સુરેખાને ક્ષત એકજ લંબ દોરી શકાય.
૭. કાષ્ઠ પણ ચતુષ્કાણુના બધા અંતઃકાણોનો સરવાળો ચાર કાટખુણા બરાબર છે.

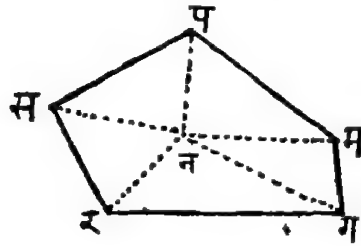
મનોયત્ન ૮

૧. સમભુજત્રિકાણનો દરેક કાણુ 60° છે.
૨. સમકોણકાટખુણુ ત્રિકાણનો દરેક સરખો કાણુ 45° છે.
૩. કાટખુણુ ત્રિકાણના કાટખુણામાંથી કણુંને લંબ દોરવાથી બનતા બન્ને ત્રિકાણો મળી ત્રિકાણ સાથે સમકાણુ છે.
૪. કાષ્ઠ પણ પાયા ઉપર એ ત્રિકાણો એક ત્રિકાણ ખીખની અંદર આવે તેવી રીતે આવ્યા હોય, તો પાયાની સામેનો અક્ષરના ત્રિકાણનો કાણુ અંદરના ત્રિકાણના પાયાની સામેના કાણુ કરતાં નાનો છે.

સિદ્ધાન્ત ૯

૧

કોઈ પણ બહુકોણની બુજઓની સંખ્યા સ હોય, તો તેના અંતઃકોણોનો સરવાળો ($૨સ-૪$) કોટબુણો બરાબર થાય.



પક્ષ : સરગમપ સ બુજઓથી બનેલો બહુકોણ છે.

સાધ્ય : $\angle સ + \angle ર + \angle ગ + \angle મ \dots = (૨સ-૪)$ કો. બુ.

રચના : આકૃતિની અંદર કોઈ એક ન બિંદુ હોય. નસ, નર નગ, ... વગેરે બોડો એટલે સ ત્રિકોણો બનશે.

સાબીતી: સ ત્રિકોણોના અંતઃકોણો = $\left\{ \begin{array}{l} \angle સ + \angle ર + \angle ગ + \dots \\ + ન \text{ આગળના કોણો} \end{array} \right.$

$\therefore \left\{ \begin{array}{l} \angle સ + \angle ર + \angle ગ + \dots \\ + ન \text{ આગળના કોણો} \end{array} \right\} = ૨સ \text{ કો. બુ.}$

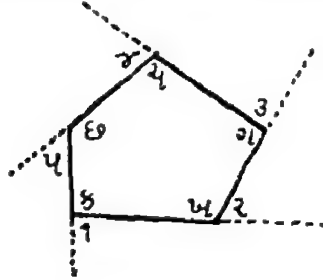
ન આગળના કોણોનો સરવાળો = ૪ કો. બુ.

$\therefore \angle સ + \angle ર + \angle ગ + \dots + ૪ \text{ કો. બુ.} = ૨સ \text{ કો. બુ.}$

$\therefore \angle સ + \angle ર + \angle ગ + \dots = ૨સ \text{ કો. બુ.} - ૪ \text{ કો. બુ.}$
 $= (૨સ-૪) \text{ કો. બુ.}$

ઉપસિદ્ધાન્ત :

કોઈ પણ બહુકોણની ભુજાઓ અનુક્રમે લંબાવીએ તો બધા બાહ્યકોણોનો સરવાળો ચાર કોટખુણા બરાબર થાય.



$$[\text{અંતઃકોણો} = (૨૨૨ - ૪) \text{ કા. ખુ.}]$$

$$\text{બાહ્યકોણો} + \text{અંતઃકોણો} = ૨૨૨ \text{ કા. ખુ.}$$

$$\therefore \text{બાહ્યકોણો} + (૨૨૨ - ૪) \text{ કા. ખુ.} = ૨૨૨ \text{ કા. ખુ.}$$

$$\therefore \text{બાહ્યકોણો} = ૪ \text{ કા. ખુ. }]$$

સૂચના : સમબહુકોણનો અંતઃકોણ બાહ્યકોણ અપેક્ષા હોય તે ઉપરથી તે ફેરવી ભુજાઓને એ તેની ગણતરી નીચે પ્રમાણે થાય :

$$\begin{aligned} \text{સમબહુકોણની ભુજાઓ} &= \frac{૩૬૦^\circ}{\text{બાહ્યકોણ}} \\ &= \frac{૩૬૦^\circ}{૧૮૦^\circ - \text{અંતઃકોણ}} \end{aligned}$$

મનોયત્ન ૯

૧. ત્રણ બહુકોણોના અંતઃકોણોનો સરવાળો અનુક્રમે ૬, ૧૬ અને ૨૦ કા. ખુ. હોય, તો દરેક બહુકોણની ભુજાઓ કેટલી ?

૨. એક ચતુષ્કોણના ત્રણ કોણો 10° , 900° અને 940° હોય તો ચોથો કોણ કેટલો ?

૩. ૪, ૫, ૬, ૮ અને ૧૦ ભુજાના સમબહુકોણોનો દરેક અંતઃ અને બાહ્ય કોણ કેટલો ?

૪. છ સમબહુકોણોના અંતઃકોણો અનુક્રમે 962° , 940° , 80° , 908° , 934° અને 988° હોય, તો તે દરેકને કેટલી ભુજાઓ હોય ?

૫. પાંચ સમબહુકોણોના બાહ્યકોણો અનુક્રમે 80° , 84° , 36° , 30° અને 98° હોય, તો તે દરેકને કેટલી ભુજાઓ હશે ?

૬. દરેકનો બાહ્યકોણ અનુક્રમે 7° , 99° , 93° , 94° , 29° , અને 33° હોય તેવા સુમબહુકોણ અની શકે ? કારણ આપો.

૭ બાહ્યકોણ પહોળો હોય એવી સમકોણ આકૃતિ કયી ?

૮. ઓઝામાં ઓછી ભુજવાળા સમકોણનો દરેક કોણ કેવડો ?

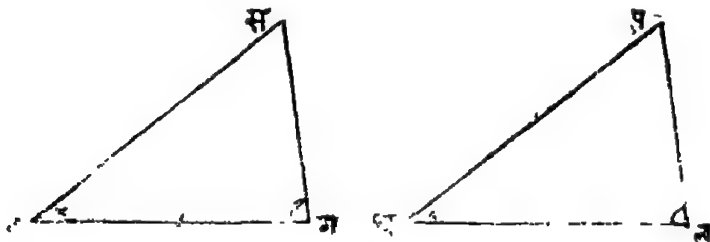
૯ એક સમબહુકોણનો અંતઃકોણ બાહ્યકોણથી ત્રણ ગણો છે, તો કેટલી ભુજાઓ હશે ?

૧૦. કોઈ એક પંચકોણ દોરો. તેની ભુજાઓ અને બાહ્ય કોણો તારાના આકારની આકૃતિ બનાવો. સાબીત કરો કે તારાના ખુણાઓના કોણોનો સરવાળો બે કાટખુણા બરાબર છે.

૧૧ એક ત્રિકોણની ત્રણ ભુજાઓ અનુક્રમે લંબાવતાં બે બાહ્યકોણોનો સરવાળો ત્રીજા બાહ્યકોણથી બમણો હોય, તો ત્રિકોણનો એક કોણ 80° નો છે.

સિદ્ધાન્ત ૧૦

જો એક ત્રિકોણના બે કોણો અને એક બુદ્ધિ બીજા ત્રિકોણના બે કોણો અને અનુવર્તિ બુદ્ધિની બરાબર હોય તો બન્ને ત્રિકોણો એકરૂપ છે.



પક્ષ : \triangle ઓ સરગ અને પધન માં \angle સ = \angle પ, \angle ર = \angle ધ અને રગ = ધન.

સાધ્ય : \triangle સરગ \equiv \triangle પધન.

સામીતી : \angle ગ = \angle ન \because બે \triangle ઓના બે કોણો સમાન.
 \triangle સરગ ને \triangle પધન ઉપર એવી રીતે મૂકા કે ર, ધ ઉપર પડે અને રગ, ધન ઉપર પડે.

ગ, ન ઉપર પડશે. \therefore રગ = ધન પક્ષ

રસ, ધપ ઉપર અને સ ધપ }
 કે ધપ લંબાવેલી ઉપર પડશે. } $\therefore \angle$ ર = \angle ધ પક્ષ

ગસ, નપ ઉપર અને સ, નપ }
 કે નપ લંબાવેલી ઉપર પડશે. } $\therefore \angle$ ગ = \angle ન

\therefore રસ અને ગસ નું સામાન્ય બિંદુ સ, ધપ અને નપ ના સામાન્ય બિંદુ પ ઉપર પડશે.

\therefore \triangle સરગ, \triangle પધન સાથે એકાકાર થશે.

\therefore \triangle સરગ \equiv \triangle પધન.

મનોયત્ન ૧૦

૧

૧. આ સિદ્ધાન્તની આકૃતિમાં બાકીની સરખી ભુજાઓ અને સરખા કોણો બતાવો.

૨. Δ ઓ સરગ અને પઘન માં સર = ધન \angle ર = \angle પ અને \angle સ = \angle ધ હોય, તો બંને ત્રિકોણો એકરૂપ થાય ? જવાબ માટે કારણ આપો.

૩. ત્રિકોણના શિરઃકોણને દુભાગનારી રેખા પાયાને કાટખુણે મળે તો ત્રિકોણ સમદ્વિભુજ છે.

૪. એક ત્રિકોણના બે કોણો સરખા હોય તો ત્રીજા કોણને દુભાગનારી રેખા સામેની ભુજાને કાટખુણે દુભાગે છે.

૫. સરગમ ચતુષ્કોણનો સગ વિકર્ણ છે. \angle રસગ = \angle મગસ અને \angle રગસ = \angle મસગ હોય, તો સાબીત કરો સર = મગ.

૬. કોઈ પણ કોણને દુભાગનારી રેખાના એક બિંદુમાંથી તેની ભુજાઓ ઉપર દોરેલા લંબ સરખા છે.

૭. રમ અને ગમ, સરગ ત્રિકોણના \angle ર અને \angle ગ ને દુભાગે છે. મ માંથી ત્રણે ભુજાઓને લંબ દોર્યા હોય, તો તે બધા સરખા થાય.

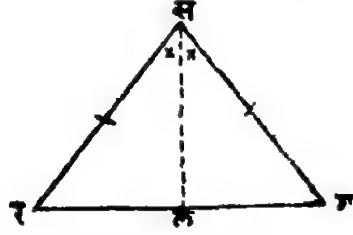
૮. ત્રિકોણની ત્રણે ભુજાઓથી સરખે અંતરે આવેલું બિંદુ શોધી કહાડો અને તે ભુજાઓથી સરખે અંતરે છે તે સાબીત કરો.

૯. સરગમ ચતુષ્કોણમાં સર = ગમ; સગ અને રમ વિકર્ણો પ માં મળે છે; \angle ગસર = \angle સગમ; સાબીત કરો કે વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે છે.

૧૦. Δ ઓ ગસર અને મસર, એકજ પાયા ઉપર અને પાયાની એક જ બાજુએ આવેલા છે. \angle ગસર = \angle મરસ, \angle ગરસ = \angle મસર હોય, તો ગર = મસ.

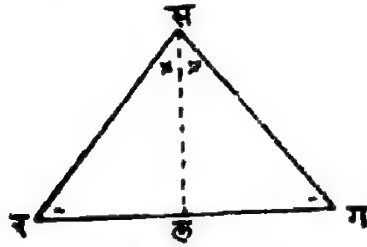
સિદ્ધાન્ત ૧૧

સમદ્વિભુજ ત્રિકોણના પાયાના કોણો સરખા છે.



[ઉપરની વ્યાકૃતિ ઉપરથી સાબીત કરો.]

વ્યત્યાસઃ ત્રિકોણના બે કોણો સરખા હોય. તો તેમની સામેની ભુજઓ પણ સરખી છે.



[ઉપરની વ્યાકૃતિ ઉપરથી સાબીતી આપો.]

ઉપસિદ્ધાન્તો :

- (૧) સમભુજ ત્રિકોણ સમકોણ છે.
- (૨) સમકોણ ત્રિકોણ સમભુજ છે.
- (૩) સમદ્વિભુજ ત્રિકોણમાં પાયાની સામેના કોણને દુભાગનારી રેખા પાયાને કાટખુણે દુભાગે છે.
- (૪) સમદ્વિભુજ ત્રિકોણની સરખી ભુજઓ સર, સગ ને અનુક્રમે પ, ઘ સુધી લંબાવવામાં આવે તો બાહ્યકોણો સરખા થાય.

૧

મનોયત્ન ૧૧

૧. સમદ્વિભુજ ત્રિકોણના શિરોબિંદુમાંથી પાયાને દોરેલો લંબ પાયાને અને શિરોકોણને દુભાગે છે.

૨. પાયાના કોણમાંથી સમભુજ કે સમદ્વિભુજ ત્રિકોણની સામેની ભુજાઓ ઉપર દોરેલા લંબ સરખા છે.

૩. કાટખુણ ત્રિકોણના કર્ણનું મધ્યબિંદુ ત્રણે શિરોબિંદુઓથી સરખે અંતરે છે.

૪. Δ સરગ માં સર = સગ; પ, ધ અને ન અનુક્રમે સર, રગ અને ગસ નાં મધ્ય બિંદુઓ છે. સાબીત કરો:—

પધ = ધન; રન = ગપ; \angle સપધ = \angle સનધ.

૫. સરગમ પતંગાકારના એક ચતુષ્કોણમાં સર = સમ અને રગ = ગમ છે. સાબીત કરો કે સગ, રમ ને કાટખુણે દુભાગે છે.

૬. સરગમ ચતુષ્કોણમાં સર = સમ અને \angle ર = \angle મ છે. સાબીત કરો: ગર = ગમ.

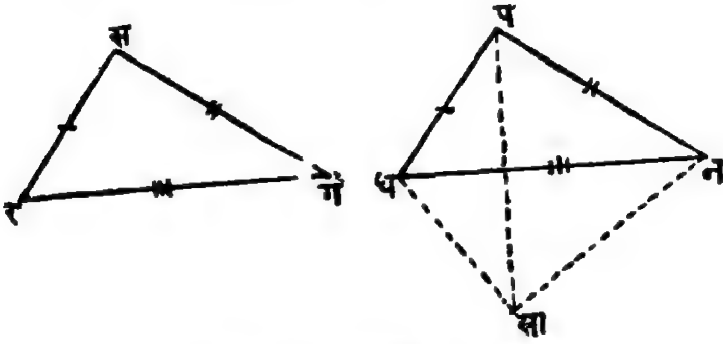
૭. Δ સરગ માં રગ પાયાને સપ અને સલ બે સમાન રેખાઓ પ અને લ બિંદુઓમાં મળે છે અને \angle રસપ = \angle ગસલ બનાવે છે, તો Δ સરગ સમદ્વિભુજ છે એ સાબીત કરો.

૮. સરગ સમદ્વિભુજ ત્રિકોણમાં સર = સગ છે. રગ ને સમાન્તર રેખા સર અને સગ ને અનુક્રમે પ અને ધ માં મળે છે. સાબીત કરો: સપધ સમદ્વિભુજ ત્રિકોણ છે.

૯. સમદ્વિભુજ Δ સરગ માં સર = સગ છે. રલ, સગ ને લંબ દોરેલો છે અને તે તેને લ માં મળે છે. સાબીત કરો: \angle સ = ૨ \angle લરગ.

સિદ્ધાન્ત ૧૨

જો એક ત્રિકોણની ત્રણ ભુજાઓ બીજા ત્રિકોણની ત્રણ ભુજાઓ સમાન હોય, તો ત્રિકોણો એકરૂપ છે.



પ્રકાશ : \triangle ઓ સરગ અને પધન માં
સર = પવ, સગ = પન, રગ = ધન.

સાધ્ય : \triangle સરગ \equiv \triangle પધન.

રચના : ધારો કે રગ, \triangle સરગ ની મોટામાં મોટી ભુજા છે.

\triangle સરગ ને \triangle પધન ઉપર એવી રીતે મૂકો કે રગ તેની સમાન રેખા ધન માં મળી જાય અને સ બિંદુ પની સામેની બાજુએ સા ઉપર પડે. પસા બેઠો.

સાબીતી : \triangle સરગ \equiv \triangle સાધન \because એકજ ત્રિકોણ બીજા જગ્યાએ મૂકેલો છે.

હવે \angle ધપસા = \angle ધસાપ \because ધપ = ધસા

\angle નપસા = \angle નસાપ \because નપ = નસા

\therefore આખો \angle પ = આખો \angle સા અથવા \angle સ.

હવે \triangle ઓ સરગ અને પધન માં

$\left. \begin{array}{l} \text{સર} = \text{પથ} \\ \text{સગ} = \text{પન} \end{array} \right\} \text{પક્ષ.}$
 અંતઃ \angle સ = અંતઃ \angle પ સામીત કર્યું.
 $\therefore \Delta \text{સરગ} \equiv \Delta \text{પથન.}$

મનોયન ૧૨

૧. સરગમ ચતુષ્કાણુમાં સર = ગમ અને રગ = મસ હોય, તો (ક) \angle સમગ = \angle સરગ: (ખ) ચતુષ્કાણુની ભુજાઓ \parallel છે.

૨. સમચતુર્ભુજના કણો તેના કાણોને દુભાગે છે અને એકબીજાને કાટખુણે દુભાગે છે અને સામાન્ય પાયાને પણ કાટખુણે દુભાગે છે.

૩. બે સમદ્વિભુજ ત્રિકોણો એક જ પાયા ઉપર દોરેલા હોય તો તેમનાં શિરોબિંદુઓને જોડનારી રેખા શિરોબિંદુ આગળનો કાણોને દુભાગે છે.

૪. ત્રણ સુરેખાઓ સમપ, રમલ, અને ગમધ, મ બિંદુમાંથી મ આગળ દુભાગાય તેવી રીતે દોરેલી છે. સામીત કરો:

$\Delta \text{સરગ} \equiv \Delta \text{પલધ}$

૫. કોઈ એક વર્તુલની સર જીવાનું મધ્યબિંદુ મ હોય અને ક વર્તુલનું કેન્દ્ર હોય, તો કમ \perp સર.

૬. ક કેન્દ્રવાળા વર્તુલમાં પલ અને સર સરખી જીવાઓ દોરેલી હોય, તો તેમનાથી કેન્દ્ર આગળ થતતા કાણો સરખા છે.

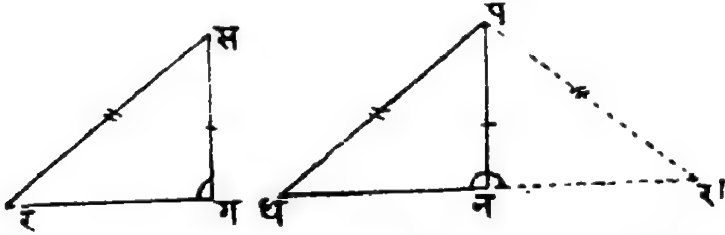
૭. સમભુજ ત્રિકોણની ભુજાઓનાં મધ્યબિંદુઓ જોડવાથી થતો ત્રિકોણ પણ સમભુજ છે.

૮. કોઈ બે વર્તુલો એકબીજાને છેદે, તો છેદન બિંદુઓને જોડનારી રેખાને તેમનાં કેન્દ્રો જોડનારી રેખા કાટખુણે દુભાગે છે.

૯. Δ પથન ની ઘપ ને નપ ભુજાઓ પ માં થઈને અનુક્રમે સ અને ર સુધી લંબાવી ઘસ = નર બનાવી હોય અને ઘન = સર હોય, તો $\Delta \text{સરધ} \equiv \Delta \text{નધર.}$

સિદ્ધાન્ત ૧૩

એ કાટખુણ ત્રિકોણમાં એકનો કર્ણ અને એક ભુજ બીજાના કર્ણ અને એક ભુજ બરાબર હોય, તો ત્રિકોણો એકરૂપ છે.



પક્ષ : \triangle ઓ સરગ અને પધન માં $\angle ગ = \angle ન = ૯૦^\circ$,
સર = પધ, અને સગ = પન.

સાધ્ય : \triangle સરગ $\equiv \triangle$ પધન.

રચના : \triangle સરગ ને \triangle પધનની સાથે એવી રીતે મૂકા કે જેથી સગ રેખા તેની બરાબર પન રેખા ઉપર પડે અને તેમાં મળી જાય અને ર, ધની સામેની બાજુએ રા ઉપર પડે.

સાબીતી : \triangle સરગ $\equiv \triangle$ પરાન \because એક જ ત્રિકોણ બીજા જગ્યાએ મૂકેલો છે.

$\therefore \angle પનધ + \angle પનરા = ૧૮૦^\circ$ પક્ષ.

\therefore ધનરા સુરેખા છે.

હવે પધ = સર = પરા.

$\therefore \angle પધન = \angle પરાન = \angle સરગ$.

હવે \triangle ઓ સરગ અને પધનમાં

$\angle સરગ = \angle પધન$

$\left. \begin{array}{l} \angle ગ = \angle ન \\ સગ = પન \end{array} \right\}$

$\therefore \triangle$ સરગ $\equiv \triangle$ પધન.

સાબીત કર્યું :

પક્ષ

મનોરથન ૧૩

૧

૧. મસ અને મર સુરેખાઓ વચ્ચે આવેલા કોઈ એક ક બિંદુમાંથી મસ અને મર ઉપર દોરેલા લંબ સરખા હોય, તો મક રેખા \angle સમર ને દુભાગે છે.

૨. કોઈ એક વર્તુલનું કેન્દ્ર ક અને જીવા સર છે. કમાંથી જીવા ઉપર લંબ દોર્યો હોય તો તે જીવાને દુભાગે છે.

૩. રમ અને ગમ, \triangle સરગના \angle ર અને \angle ગ ને દુભાગે છે. સાબીત કરો કે મસ જોડવામાં આવે તો તે \angle સ ને દુભાગે.

૪. \triangle સરગમાં રમ અને ગપ અનુક્રમે સગ અને સર ઉપર દોરેલો લંબ છે. જો રમ = ગપ હોય તો ત્રિકોણ સમદ્વિભુજ છે.

૫. \triangle સરગની સર અને સગ ભુજામાં પ અને ઘ સુધી લંબાવી હોય અને \angle પરગ અને \angle ઘગરને દુભાગનારી રેખાઓ મ બિંદુમાં મળતી હોય તો મસ પણ \angle સને દુભાગે છે.

૬. કોઈ પણ વર્તુલમાં સરખી જીવાઓ કેન્દ્રથી સરખે અન્તરે હોય છે.

૭. \triangle ઓ સરગ અને પઘનમાં સર = પઘ, સગ = પન અને સલ લંબ = પમ લંબ હોય, તો \triangle સરગ \equiv \triangle પઘન.

૮. બે ત્રિકોણોના પાયા, મધ્યગાઓ અને લંબ સરખા હોય તો ત્રિકોણો એકરૂપ છે.

૯. ત્રિકોણની ભુજાઓને દુભાગનારા લંબ એકબિંદુમાંથી છે અને આ બિંદુ ત્રિકોણનાં ત્રણે શિરોબિંદુઓથી સરખે અન્તરે છે.

૧૦. ત્રિકોણના કોણોને દુભાગનારી રેખાઓ એકબિંદુમાંથી છે અને આ બિંદુ ત્રિકોણની ત્રણે ભુજાઓથી સરખે અન્તરે છે.

૧૧. ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓથી સામેની ભુજાઓ ઉપર દોરેલા લંબ એકબિંદુમાંથી છે.

૧૨. બે ત્રિકોણોમાં એકની બે ભુજાઓ અને આ ભુજાઓની એકની સામેના કોણ અનુક્રમે બીજાની બે ભુજાઓ અને આ ભુજાઓમાંની એકની સામેના કોણની બરાબર હોય, તો બાકીની સરખી ભુજાઓની સામેના કોણો સરખા અથવા પૂરક છે.

ત્રિકોણની એકરૂપતા ઉપર સૂચના.

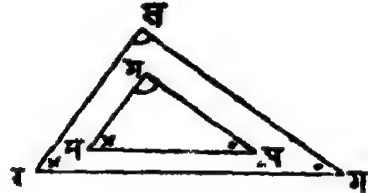
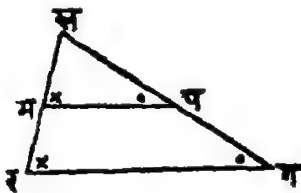
અત્યાર સુધી સાબીત કરેલા સિદ્ધાન્તો ઉપરથી સમજાશે કે બે ત્રિકોણો એકરૂપ થવાને નીચે આપેલી શરતો આવશ્યક છે:

૧. એકની બે ભુજાઓ અને અંતઃકોણ બીજાની બે ભુજાઓ અને અંતઃકોણ બરાબર.

૨. એકના બે કોણ અને એક ભુજા બીજાના બે કોણ અને અનુવર્તિ ભુજા બરાબર.

૩. એકની ત્રણ ભુજાઓ બીજાની ત્રણ ભુજાઓ બરાબર.

૪. કાટપુણ ત્રિકોણોમાં એકનો કર્ણ અને એક બીજા ભુજા બીજાના કર્ણ અને એક બીજા ભુજા બરાબર.

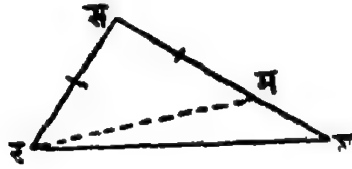


એક ત્રિકોણનાં ગમે તે ત્રણ તત્ત્વ બીજાનાં ગમે તે ત્રણ તત્ત્વ બરાબર હોય તો ત્રિકોણો એકરૂપ થતા નથી, તે ઉપરની આકૃતિઓ ઉપરથી સમજાશે.

૧

સિદ્ધાન્ત ૧૪

કોઈ પણ ત્રિકોણમાં એક ભુજા બીજી કરતાં મોટી હોય, તો મોટી ભુજાની સામેનો કોણ નાની ભુજાની સામેના કોણ કરતાં મોટો છે.



પ્રકાશ : \triangle સરગમાં સગ > સર.

સાધ્ય : \angle સરગ > \angle સગર.

રચના : સગમાંથી સમ = સર કાપી રમ જોડો.

સાધ્યીતી . \angle સરમ = \angle સમર \therefore સર = સમ રચના.

પણ \angle સમર > \angle સગર $\therefore \angle$ સમર, બાહ્યકોણ.

$\therefore \angle$ સરમ > \angle સગર.

પણ \angle સરગ > \angle સરમ.

$\therefore \angle$ સરગ > સગર.

મનોરથન ૧૪

૧. \triangle સરગમાં સર > સગ, સમ, \angle સ ને દુલાગી પાયાને મ માં મળે છે. સરમાંથી સપ = સગ કાપીને મપ જોડી છે.

સાધ્યીત કરો: \angle ગ > \angle ર.

૨. \triangle સરગમાં રગ = ૭ સેમિ., ગસ = ૬.૭ સેમિ., સર = ૭.૫ સેમિ., હોય તો મોટામાં મોટો અને નાનામાં નાનો કોણ કયો ?

૩. ત્રિકોણની મોટામાં મોટી ભુજાના છેડાના કોણો લઘુ છે.

૪. સિદ્ધાન્તની આકૃતિમાં સાધ્યીત કરો: \angle ગરમ = $\frac{1}{2}$ (\angle સરગ - \angle સગર); \angle સમર = $\frac{1}{2}$ (\angle સરગ + \angle સગર)

સિદ્ધાન્ત ૧૫

કોઈ પણ ત્રિકોણમાં એક કોણ બીજા કરતાં મોટો હોય તો મોટા કોણની સામેની બુજા નાના કોણની સામેની બુજા કરતાં મોટી છે.



પક્ષ : \triangle સરગમાં $\angle ર > \angle ગ$.

સાધ્ય : સગ $>$ સર.

સાબીતી : સગ અને સર બુજાઓની લંબાઈ સંબંધી નીચે પ્રમાણે ત્રણ અનુમાન કરી શકાય.

(૧) સગ = સર,

(૨) સગ $<$ સર,

(૩) સગ $>$ સર.

અનુમાન (૧) પ્રમાણે જો સગ = સર હોય તો $\angle ર = \angle ગ$ થાય; પણ પક્ષ પ્રમાણે આ અશક્ય છે.

અનુમાન (૨) પ્રમાણે જો સગ સર હોય તો $\angle <$

$\angle ગ$ થાય; આ પણ પક્ષ પ્રમાણે અશક્ય છે.

\therefore સગ, સરની બરાબર કે સરથી ઓછી નથી.

\therefore અનુમાન (૩) સત્ય હોવું જોઈએ.

\therefore સગ $>$ સર.

વિપસિદ્ધાન્તો :

- (૧) કાટખુણ ત્રિકોણનો કર્ણ તેની મોટામાં મોટી ભુજ છે.
 (૨) ગુરુકોણ ત્રિકોણમાં ગુરુકોણની સામેની ભુજ મોટામાં મોટી છે

મનોયત્ન ૧૫

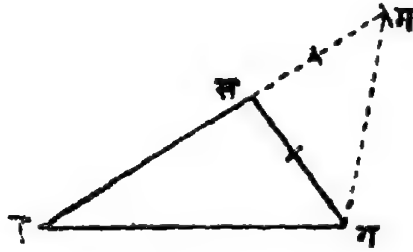
૧. ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓમાંથી સામેની ભુજઓ ઉપર દોરેલા લંબનો સરવાળો ત્રિકોણની પરિમિતિ^x કરતાં ઓછો છે.
 ૨. સમ, Δ સરગના \angle સ ને દુભાગે છે અને રગ ને મ માં મળે છે. સાબીત કરો: રગ \angle સર + સગ
 ૩. પ્રશ્ન ૨, ની આકૃતિમાં \angle ર અને \angle ગ લઘુકોણો હોય તો સમાંથી પાયા ઉપર લંબ દોરી બે ભુજઓ ત્રીજી કરતાં મોટી છે એ સાબીત કરો.
 ૪. સર રેખાને મલ લંબ એક બહારના મ બિંદુમાંથી દોર્યો હોય અને મ માંથી એક બીજી મપ રેખા સર ને પ માં મળે તેમ દોરી દોય, તો મપ $>$ મલ થાય એ સાબીત કરો.
- આ ઉપરથી સાબીત કરો: કોઈ પણ બહારના બિંદુમાંથી કોઈ પણ સુરેખા ઉપર રેખાઓ દોરવામાં આવે, તો લંબ એ નાનામાં નાની રેખા છે.
૫. કોઈ પણ આપેલી રેખાના મધ્ય બિંદુમાંથી દોરેલી સુરેખાથી આપેલી સુરેખાના છેડાઓ સરખે અંતરે છે.

^x કોઈ પણ આકૃતિની ભુજઓની લંબાઈનો સરવાળો તેની પરિમિતિ કહેવાય છે.

* કોઈ પણ બિંદુમાંથી સુરેખા ઉપર દોરેલો લંબ ટુંકામાં ટુંકી રેખા છે માટે તે તેનું અંતર કહેવાય છે. સુરેખાથી બિંદુનું અંતર તે બિંદુમાંથી રેખા ઉપર દોરેલો લંબ છે.

સિદ્ધાન્ત ૧૬

કોઈ પણ ત્રિકોણની બે બુજબુજોનો સરવાળો ત્રીજી બુજબુજ કરતાં મોટો છે.



પક્ષ : સરગ કોઈ એક Δ છે.

સાધ્ય : (ક) રસ + સગ > રગ (ખ) સર + રગ > સગ
(ગ) રગ + સગ > રસ.

રચના : રસ ને લખાવી સમ = સગ કરો અને મગ જોડો.

સાબીતી : \angle સગમ = \angle સમગ \therefore સમ = સગ રચના.

હવે \angle રગમ > \angle સગમ,

$\therefore \angle$ રગમ > \angle સમગ.

\therefore રસ > રગ.

પણ રસ = રસ + સમ = રસ + સગ રચના,

\therefore રસ + સગ > રગ.

આ જ પ્રમાણે સર + રગ > સગ અને રગ + સગ > રસ સાબીત કરી શકાય.

ઉપસિદ્ધાન્ત : ત્રિકોણની બે બુજબુજોનો તફાવત ત્રીજી કરતાં નાનો છે.

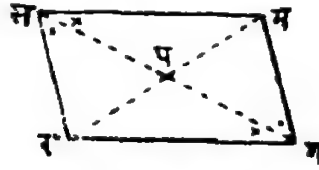
(સિદ્ધાન્ત ૧૪ની રચનાની મદદ લઈ સાબીત કરો અને સિદ્ધાન્ત ૧૬ની મદદ લઈ સાબીત કરો.)

મનોયત્ન ૧૬

૧. સિદ્ધાન્તના (ખ) અને (ગ) ભાગની સ્વતંત્ર સામીતી આપો.
૨. ચતુષ્કોણની ત્રણ બુજાઓનો સરવાળો એથી બુજાથી વધારે છે.
૩. મપગન ચતુષ્કોણમાં લ એક ખિંદુ હોય તો સામેની બુજાઓની એક જોડ લમ + લપ + લધ + લન કરતાં ઓછી છે.
૪. કોઈ પણ પાયા ઉપર બે ત્રિકોણો એક બાજુએ એક બીજાની અંદર હોય, તો અંદરના ત્રિકોણની બન્ને બુજાઓને સરવાળો બહારના ત્રિકોણની બે બુજાઓના સરવાળાથી ઓછો છે.
૫. ત્રિકોણની અંદરના કોઈ એક ખિંદુને શિરોખિંદુઓ સાથે જોડનારી સુરેખાઓનો સરવાળો > ત્રિકોણની અર્ધા પરિમિતિ.
૬. ત્રિકોણના શિરોખિંદુમાંથી સામેની બુજા ઉપર દોરેલી મધ્યગા ખાડીની બે બુજાઓના અર્ધા સરવાળાથી ઓછી છે.
૭. ત્રિકોણની પરિમિતિ તેની ત્રણ મધ્યગાઓ કરતાં વધારે અને અર્ધા પરિમિતિ ત્રણ મધ્યગાઓથી ઓછી છે.
૮. ચતુષ્કોણની પરિમિતિ તેના વિકર્ણોના સરવાળાથી વધારે અને બમણા વિકર્ણોના સરવાળાથી ઓછી છે.
૯. સરગમ ચતુષ્કોણમાં ૫ કોઈ એક ખિંદુ હોય, તો તેના વિકર્ણોનો સરવાળો પસ + પર + પગ + પમ કરતાં ઓછો છે.
૧૦. ચતુષ્કોણની અંદર એક ખિંદુ એવું શોધી કઢાડો કે જેનાં શિરોખિંદુઓ સુધીનાં અંતરોનો સરવાળો નાનામાં નાનો હોય.
૧૧. \triangle સરગની રગ બુજા મોટામાં મોટી છે. મ અને પ ખિંદુઓ સર અને સગ ઉપર છે. સામીત કરો: રગ > મપ.
૧૨. ત્રિકોણની અંદર તેની મોટામાં મોટી બુજાથી વધારે મોટી રેખા દોરી શકાય નહિ.
૧૩. એક ત્રિકોણ બીજા ત્રિકોણની અંદર સમાઈ ગયો હોય, તો અંદરનાની પરિમિતિ બહારનાની પરિમિતિ કરતાં ઓછી છે.

સિદ્ધાન્ત ૧૭

સમાન્તર ચતુષ્કોણના (૧) સામેના કોણો સમાન છે, (૨) સામેની બુજબુજો સમાન છે, (૩) દરેક વિકર્ણ સમાન્તર ચતુષ્કોણને દુભાગે છે અને (૪) વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે છે.



પક્ષ : સરગમ સમાન્તર ચતુષ્કોણ છે. સગ અને રમ વિકર્ણો પરસ્પર પ માં છેદે છે.

સાધ્ય : (૧) \angle સરગ = \angle ગમસ, \angle રસમ = \angle મગર.
 (૨) સર = ગમ, સમ = ગર.
 (૩) \triangle સરગ \cong \triangle ગમસ, \triangle રસમ \cong \triangle મગર.
 (૪) સપ = પગ, રપ = પમ.

સાધીતી : \triangle ઓ સરગ અને ગમસ માં,
 \angle રસગ = બ્યુ. \angle મગસ \therefore સર \parallel મગ,
 \angle રગસ = બ્યુ. \angle મસગ \therefore સમ \parallel રગ,
 સગ બંનેમાં સામાન્ય.

$\therefore \triangle$ સરગ \cong \triangle ગમસ.

\therefore (૧) \angle સરગ = ગમસ; તેવીજ રીતે \angle રસમ = \angle મગર.

(૨) સર = ગમ, સમ = ગર.

(૩) સગ \parallel કોણને દુભાગે છે.

તેવીજ રીતે રમ પણ \parallel કોણને દુભાગે છે.

- ! વધારામાં \triangle ઓ સપમ અને ગપર માં,
 \angle સપમ = \angle ગપર \therefore અભિક્રાણો,
 \angle મસપ = અ. \angle રગપ \therefore સમ \parallel રગ,
 \therefore સમ = ગર \therefore ઉપર સાબીત કર્યું,
 $\therefore \triangle$ સપમ $\equiv \triangle$ ગપર.
 \therefore (૪) સપ = ગપ, રપ = મપ.

ઉપસિદ્ધાન્તો :

- (૧) સમાન્તર ચતુષ્કોણનો એક કોણ કાટખુણો હોય તો તે લંબચોરસ છે.
- (૨) સમાન્તર ચતુષ્કોણની ઉપભુજઓ સમાન હોય, તો તે સમભુજ ચતુષ્કોણ છે.
- (૩) લંબચોરસની ઉપભુજઓ સમાન હોય તો તે ચોરસ છે.
- (૪) કોઈ પણ ચતુષ્કોણમાં (ક) સામેના કોણો સમાન હોય, (ખ) સામેની ભુજઓ સમાન હોય, (ગ) તેના કોણો એક બીજાને દુભાગે, વા (ધ) સામેની ભુજઓની એક જોડ સમાન્તર અને સમાન હોય, તો ચતુષ્કોણ સમાન્તર ચતુષ્કોણ છે.
- (૫) સમાન્તર રેખાઓ હંમેશાં સમાન અંતરે રહે છે.
- (૬) કોઈ પણ આપેલી સુરેખા ઉપર જો બે સમાન લંબ એક જ બાજુએ દોર્યા હોય, તો તેમના છેડાને સાંધનારી સુરેખા આપેલી રેખાને સમાન્તર છે.

મનોયત્ન ૧૭

૧. કાષ્ઠ પશુ ॥ કાણુમાં સામેની બે ભુજાઓનાં મધ્ય બિંદુઓને જોડનારી સુરેખા બીજી ભુજાઓને સમાન્તર છે.

૨. કચટત ॥ કાણુમાં મ અને લ અનુક્રમે કચ અને ટત ના મધ્ય બિંદુઓ છે. તેા ચમતલ ॥ કાણુ છે એ સાબીત કરેા.

૩. ॥ કાણુનાં વિકર્ણો જંત તે લંબચોરસ ન હોય તેા સરખા હોતા નથી.

૪. ચતુષ્કાણુના વિકર્ણો સરખા હોય અને પરસ્પર દુભાગે તેા ચતુષ્કાણુ લંબચોરસ છે.

૫. સમભુજ ચતુષ્કાણુના વિકર્ણો પરસ્પર કાટખુણે દુભાગે છે.

૬. ॥ કાણુના કાણોને દુભાગનારી રેખાઓ લંબચોરસ બનાવે છે.

૭. વિકર્ણો મરખા હોઈ પરસ્પર કાટખુણે દુભાગે તેા ચતુષ્કાણુ ચોરસ છે.

૮. ॥ કાણુના વિકર્ણોના છેદન બિંદુમાંથી સામેની ભુજાઓ સુધી દોરેલી સુરેખા તે બિંદુમાં દુભાગાય છે અને તે ॥ કાણુને પણ દુભાગે છે.

૯. ॥ કાણુમાં કર્ણથી તેની સામેનાં શિરોબિંદુઓ સરખે અંતરે છે.

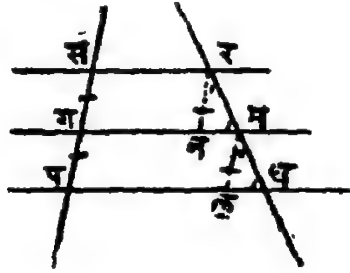
૧૦. વર્તુલના બે વ્યાસના છેદાઓને જોડનારી રેખાઓ લ. ચા. બનાવે છે.

૧૧. સરગમ અને ગરપધ ॥ કાણુ સર પાયા ઉપર આવેલા છે, તેા મગપધ પશુ ॥ કાણુ છે એ સાબીત કરો.

૧૨. સરગમ ॥ કાણુના ગસ વિકર્ણને સપ = સગ થાય ત્યાં સુધી લંબાની સરપધ ॥ કાણુ પૂરો કર્યો હોય, તેા સમ અને સધ એકજ સુરેખામાં આવે.

સિદ્ધાન્ત ૧૮

ત્રણ અથવા વધારે સમાન્તર સુરેખાઓ કોઈ એક છેદકના અંતર્ભાગે સરખા બનાવતી હોય, તો તેઓ બીજા કોઈ પણ છેદકના અંતર્ભાગે પણ સરખા બનાવે છે.



પક્ષ : સર, ગમ, અને પધ સમાન્તર રેખાઓ સગપ અને રમધ ને છેદે છે અને સગ = ગપ બનાવે છે.

સાધ્ય : રમ = મધ.

રચના : રમાંથી રન અને મમાંથી મલ, સગપને ॥ દોરો.

સાબીતી : સગ = રન. ∴ સગનર ॥ કોણ. પક્ષ અને રચના.

ગપ = મલ. ∴ ગપલમ ॥ કોણ. પક્ષ અને રચના.

પણ સગ = ગપ પક્ષ.

∴ રન = મલ.

હવે \triangle ઓ રમન અને મધલમાં

રન = મલ સાબીત કયું.

\angle નરમ \equiv \angle લમધ ∴ રન ॥ સપ ॥ મલ રચના

\angle રમન \equiv \angle મધલ ∴ ગમ ॥ પધ. પક્ષ.

∴ \triangle રમન \equiv \triangle મધલ.

∴ રમ = મધ.

વ્યત્યાસ : જેથી વધારે સુરેખાઓ કાઢ પશુ છેદકના અંતે લાગે સરખા બનાવતી હોય તો તે સુરેખાઓ સમાન્તર છે.

ઉપસિદ્ધાન્તો :

(૧) ત્રિકોણની કોઈ ભુજના મધ્ય બિંદુમાંથી પાયાને સમાન્તર રેખા દોરવામાં આવે, તો તે બીજી ભુજને દુભાગે છે.

(૨) ત્રિકોણની બે ભુજઓનાં મધ્ય બિંદુઓને જોડનારી રેખા ત્રીજી ભુજને સમાન્તર છે અને તેથી અર્ધી છે.

મનોયત્ન ૧૮

૧. કાઢ પશુ ત્રિકોણની ભુજઓનાં મધ્ય બિંદુઓને જોડવાથી ત્રિકોણના જે ચાર ભાગ થાય છે તે સઘળા એકરૂપ છે.

૨. કાઢ પશુ ચતુષ્કોણની ભુજઓનાં મધ્ય બિંદુઓને અનુક્રમે જોડવાથી થતો ચતુષ્કોણ ॥ કોણ છે.

૩. કાઢ પશુ ચતુષ્કોણની ભુજઓનાં સામેનાં મધ્ય બિંદુઓને જોડનારી રેખાઓ પરસ્પર દુભાગે છે.

૪. ત્રિકોણના શિરોબિંદુમાંથી પાયા ઉપર દોરેલી રેખા બીજી ભુજઓનાં મધ્યબિંદુઓને જોડનારી રેખાથી દુભાગાય છે.

૫. કચટત ॥ કોણ છે. ઘ અને ન અનુક્રમે કચ અને ટતનાં મધ્યબિંદુઓ છે, તો ચન અને ઘત, કટને ત્રિભાગે છે.

૬. * સમલંબચતુષ્કોણની સમાન્તર ન હોય તેવી ભુજઓનાં મધ્યબિંદુઓને જોડનારી રેખા સમાન્તર ભુજઓના સરવાળાથી અર્ધી છે.

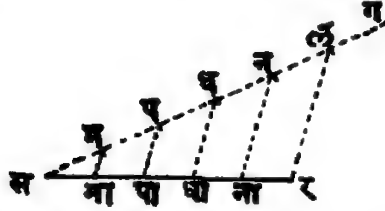
૭. ત્રિકોણની મધ્યગાઓ એક જ બિંદુમાં મળે છે અને દરેક મધ્યગા તે બિંદુમાં ત્રીજે ભાગે છેવાય છે.

૮. સરગમ ॥ કોણની સર અને સમ ભુજઓનાં પ અને લ મધ્યબિંદુઓ છે. સાપીત કરો: ગપ અને ગલ, રમ ને ત્રિભાગે છે.

* જે ચતુષ્કોણની સામસામેની ભુજઓની એક જોડ સમાન્તર હોય તેને સમલંબચતુષ્કોણ કહે છે.

કૃત્ય ૧૧

આપેલી સુરેખા સરના ગમે તેટલા સરખા ભાગ કરવા.



અનુક્રુળતા ખાતર ધારો કે સરના પાંચ સરખા ભાગ કરવા છે.
 રચના : સર સાથે ગમે તે કોઈ કોણ બનાવી સમાંથી સગ
 એક અનન્ત લંબાઈની સુરેખા દોરો. કોઈ એક ત્રિજ્યા લઈ
 તેના સમ, મપ, પધ, ધન, નલ પાંચ સરખા કરો. તર
 જોડો. મ, પ, ધ, નમાંથી લરને સમાન્તર રેખાઓ દોરી
 સરને મા, પા, ધા, નામાં મળવા દો. એટલે મા, પા,
 ધા, ના, બિંદુઓ સરના પાંચ સરખા ભાગ કરશે.

સાબીતી : મમા, પપા, ધધા, નના, || તર } રચના;
 અને સમ = મપ = પધ = ધન = નલ }
 \therefore સમા = માપા = પાધા = ધાના = નાર.

મનોયતન

૧. આપેલી ૩.૫" લંબાઈની રેખાનો $\frac{1}{5}$ ભાગ જુદો પાડો અને તેની લંબાઈ માપો.

૨. ૩.૮" લંબાઈની રેખાના ૯ સરખા ભાગ કરો. આના ૪, ૫, ૬ ભાગ જેટલી લંબાઈની જુગઓ લઈ એક ત્રિકોણ દોરો.

૩. સર = ૨.૬", રગ ૩.૭", ગસ = ૪.૫" લઈ \triangle સરગ બનાવો. આ જુગઓની $\frac{1}{5}$ લંબાઈની જુગઓ લઈ સારાગા ખીજો ત્રિકોણ બનાવો. બન્નેના કોણો માપો.

નિધાન (ગતિરેખા)

પ્રાથેગિક મનોચત્તન

૧. ક નામનું એક બિંદુ સ્થિર છે. ક થી ૨" દૂર આશરે ૧૦ બિંદુઓ હોયો. આ બધાં બિંદુઓમાં થઈને પસાર થતી એક રેખા દોરો.

૨. આ રેખા ઉપરનાં બધાં બિંદુઓ ક થી કેટલે અન્તરે છે ? ક થી ૨" થી વધારે અથવા ઓછા અન્તરે આવેલાં બિંદુઓ ઉપર જણાવેલી રેખા ઉપર આવશે કે નહિ તે કારણ સાથે સ્પષ્ટ કરો.

૩. ક નામનું એક સ્થિર બિંદુ છે. ક થી ૪" દૂર એક મ નામનું અસ્થિર બિંદુ છે. તે ક થી સરખા અન્તરે રહીને જ ફરતું હોય તો કેવી આકૃતિ બનાવે ? મ બિંદુનો ઉપરની શરત પ્રમાણે ફરવાનો રસ્તો કયો ? મ બિંદુની ગતિરેખા ઉપરનાં સઘળાં બિંદુઓ ક થી કેટલે અન્તરે છે ?

૪. સર નામની એક સુરેખાથી ૨" ને અન્તરે લગભગ ૧૦ બિંદુઓ હોયો. તે બધાને જોડો. આ જોડનારી રેખા સર સાથે કેવો સંબંધ ધરાવે છે ? તે ઉપરનાં બધાં બિંદુઓ કયાં શરત પૂરી પાડે છે ? આપેલી શરત પ્રમાણે રેખાની બીજી બાજુએ બિંદુઓ લેવાથી બિંદુની ગતિરેખા તે તરફ પણ દોરી શકાય કે નહિ ? આ બે ગતિરેખાઓ ઉપરનાં બિંદુઓ સિવાય બીજાં કોઈ બિંદુ અથવા બિંદુઓ આપેલી શરત પૂરી પાડે ?

૫. સર રેખાથી ૩" ને અન્તરે રહેતા એક પ નામના અસ્થિર બિંદુની ગતિરેખા દોરો.

૬. સ અને ર ને ૨" ને અન્તરે હ્યો. સર જોડો. ક આગળ તેને દુભાગો. સ અને ર થી સર ની બન્ને બાજુએ ૨" દર એટ એક બિંદુ હ્યો. આજ પ્રમાણે સ અને ર થી ૩", ૩.૫" અને ૪" ને અન્તરે બન્ને બાજુએ બિંદુઓ હ્યો. તેમને જોડો. બિંદુની ગતિરેખા, સુરેખા કે વકરેખા થશે તે કહો.

૭. પ્રશ્ન ૬ માં ગતિરેખા ઉપર બીજાં કેટલાંક બિંદુઓ લખએ તો તે સ અને ર થી સરએ અન્તરે હોય ?

૮. પ્રશ્ન ૬ માં સર ને ગતિરેખા કેટલા અંશને કાણે કાપે છે તે કહો. આને માટે સાબીતી આપી શકશો ? આ ઉપરથી શું અનુમાન કરી શકો છો ?

૯. સ અને ર બે સ્થિર બિંદુઓ ૨" ને અન્તરે હ્યો. સ અને ર થી સરએ અન્તરે લગભગ ૧૦ બિંદુઓ શોધી કહાડો અને તે બધાને જોડો. તેમને જોડનારી રેખા સુરેખા કે વકરેખા થશે ? બિંદુની પ્રતિરેખા ઉપરનાં સઘળાં બિંદુઓ સ અને ર થી કેટલે અન્તરે છે ? ગતિરેખા ઉપર ન હોય તેવું બહારનું કોઈ બિંદુ આપેલી શરત પૂરી કરશે ?

૧૦. ૩" અંતરે આવેલાં બે બિંદુઓથી સરએ અંતરે રહેતા ૫ નામના અસ્થિર બિંદુની ગતિરેખા દોરો.

૧૧. વર્તુલની ત્રિજ્યાના મધ્ય બિંદુની ગતિરેખા દોરો. ગતિરેખા ઉપરનાં બિંદુઓ વર્તુલના મધ્યબિંદુથી કેટલે અન્તરે છે ?

૧૨. ૨" ની ત્રિજ્યા લખને એક વર્તુલ દોરો. તેના પરિધ ઉપર સ બિંદુ હ્યો. સ માંથી ૮ જીવાઓ દોરો. તેમનાં મધ્યબિંદુઓની ગતિરેખા બતાવો. જો તે વર્તુલ હોય તો તેની ત્રિજ્યા કેટલી લાંબી છે ?

૧૩. ૨" ત્રિજ્યા લઈને એક વર્તુલ દોરો. તેમાં ૧૦ સમાન્તર જીવાઓ દોરો. તેમના મધ્ય બિંદુની ગતિરેખા દોરી તે જીવાઓ સાથે કેટલો કોણ કરે છે તે કહો. આ ઉપરથી તમે શું અનુમાન કહાડો છો ?

૧૪. ૨" ત્રિજ્યા લઈ વર્તુલ દોરો. તેના કેન્દ્રથી ૪" દૂર ૫ બિંદુ લ્યો. ૫ માંથી વર્તુલના પરિધમાં મળે તેવી રીતે ૮ રેખાઓ દોરો. આ રેખાઓનાં મધ્યબિંદુઓની ગતિરેખા દોરો.

૧૫. સર = ૪" દોરો. સ માંથી ૮ રેખાઓ દોરો. ૨ માંથી આ રેખાઓને લંબ દોરો. આ રીતે થતા ૮ કાટખુણુ ત્રિકોણનાં શિરો-બિંદુઓ કયી રેખા ઉપર આવે ? ગતિરેખાની ત્રિજ્યા કેટલી ?

૧૬. બે સમાન્તર સુરેખાઓથી સરખે અન્તરે રહેતા બિંદુની ગતિરેખા કયી ?

વ્યાખ્યા: કોઈ પણ બિંદુ આપેલી શરતો પ્રમાણે ફરી પોતાને માટે જે માર્ગ દોરો તેને તે બિંદુની ગતિરેખા અથવા નિધાન કહે છે.

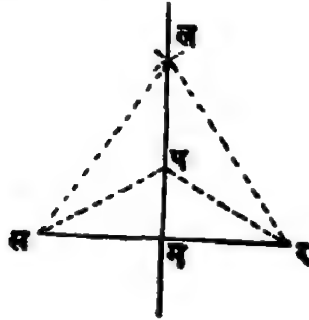
અમુક શરતો પ્રમાણે ફરનાર બિંદુનો માર્ગ એ બિંદુનું નિધાન છે એ સાબીત કરવાને નીચેની બે બાબતો સાબીત કરી બેવડી સાબીતી આપવાની જરૂર છે.

(૧) આપેલી શરત પૂરી કરતું ગમે તે બિંદુ નિધાન ઉપર છે.

(૨) નિધાન ઉપરનું ગમે તે બિંદુ આપેલી શરત પૂરી પાડે છે.

સિદ્ધાન્ત ૧૯

બે સ્થિર બિંદુઓથી સરખે અંતરે આવેલા બિંદુનું નિધાન તે બે બિંદુઓને જોડનારી સુરેખાને દુભાગનાર લંબ છે.



૧. પક્ષ : લ બિંદુ સ અને ર સ્થિર બિંદુઓથી સરખે અંતરે છે. સલ = લર

સાધ્ય : લ બિંદુ સર ને દુભાગનાર લંબ ઉપર છે.

રચના : સર જોડો અને તેને મ આગળ દુભાગો. લમ જોડો.

સાબીતી : \triangle સમલ અને \triangle રમલમાં,

$$\text{સલ} = \text{લર}$$

પક્ષ.

$$\text{સમ} = \text{રમ}$$

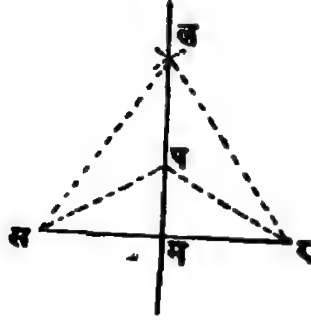
રચના.

લમ સામાન્ય છે.

$$\therefore \triangle \text{સમલ} \equiv \triangle \text{રમલ}.$$

$$\therefore \angle \text{લમસ} = \angle \text{લમર} = 90^\circ.$$

\therefore લ, સર ને દુભાગનાર લંબ ઉપર છે, એટલે કે તે નિધાન ઉપર છે.



૨. પક્ષ : સર ને મ આગળ દુભાગનાર લંબ ઉપર ગમે તે બિંદુ પ મિંદુ લેયો.

સાધ્ય : પ મિંદુ આપેલી શરત પૂરી કરે છે એટલે કે
પસ = પર.

રચના : પસ અને પર જોડો.

સાબીતી : \triangle ઓ સપમ અને રપમમાં

$$\angle સપમ = \angle રપમ$$

પક્ષ.

$$સમ = રમ$$

પક્ષ.

પમ સામાન્ય,

$$\therefore \triangle સપમ \cong \triangle રપમ.$$

$$\therefore પસ = પર$$

\therefore નિધાન ઉપરનું ગમે તે બિંદુ આપેલી શરત પૂરી કરે છે.

\therefore લમ (બન્ને બાજુ ગમે તેટલી લંબાવેલી) કે જે સર ને દુભાગનાર લંબ છે તે લનું નિધાન છે.

મનોયત્ન ૧૯

૧. સ, ર, ગ, બિંદુઓ એક વર્તુલ ઉપર આવેલાં છે. આ ત્રણે બિંદુઓથી સરખે અંતરે આવેલું વર્તુલનું કેન્દ્ર શોધી કહાડો.

૨. \triangle સરગનાં ત્રણ શિરોબિંદુઓથી સરખે અંતરે એક બિંદુ શોધી કહાડો.

૩. \triangle સરગ નાં શિરોબિંદુઓ એક વર્તુલ ઉપર આવેલાં છે. ર અને ગ થી સરખે અંતરે વર્તુલ ઉપર વધારેમાં વધારે કેટલાં બિંદુઓ આવી શકે ?

૪. એવું એક બિંદુ શોધી કહાડો કે જે સ થી ૪" અને રથી ૪.૫" દૂર હોય.

૫. સ અને રથી સરખે અંતરે આવેલું એક બિંદુ પક નામની ઘણી લાંબી સુરેખા ઉપર છે, તો તે બિંદુ શોધી કહાડો.

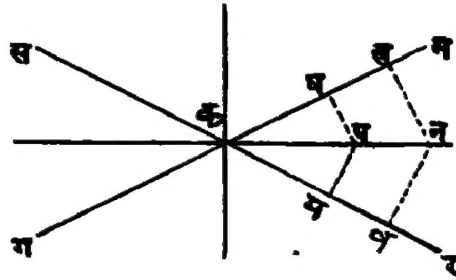
૬. સર અને ગમ ત્રણ ઇંચ દૂર જે સમાન્તર સુરેખાઓ છે. પ નામનું સ્થિર બિંદુ સરથી ૨" અને ગમથી ૧" દૂર છે; તો તેનું નિર્ધાન દોરવાને ઉપરના શબ્દોમાં શું ફેરફાર કરવો જોઈએ ?

૭. સર અને સગ રેખાઓ 42° કાણુ ખનાવે છે. તેમની વચ્ચે પ બિંદુ એવું હોય કે જે બન્ને રેખાઓથી સરખે અંતરે હોય. પસ જોડો. સાબીત કરો: \angle પસર = \angle પસગ.

૮. \angle રસગ = 40° ખનાવો. તેને સપથી દુભાગો. સપ ઉપર ગમે તે એક લંબ બિંદુ લઈ તે સર અને સગથી સરખે અંતરે છે એ સાબીત કરો.

સિદ્ધાન્ત ૨૦

પરસ્પર છેદતી બેં સુરેખાઓથી સરખે અંતરે રહેતા બિંદુનું નિધાન તે રેખાઓની વચ્ચેના કોણોને દુભાગનાર રેખાઓની જોડ છે.



(૧) પક્ષ : સકર અને ગકમ પરસ્પર ક આગળ છેડે છે.
સકર અને ગકમથી સરખે અંતરે એક ન બિંદુ થયો.
નલ = નવ.

સાધ્ય : ન બિંદુ કોણોને દુભાગનાર રેખા ઉપર છે એટલે કે
કન, \angle મકર ને દુભાગે છે.

રચના : નલ અને નવ અનુક્રમે ગકમ અને સકર ઉપર લંબ
દોરો. કન જોડો.

સાબીતી : Δ ઓ નલક અને નવકમાં

કા. \angle નલક = કા. \angle નવક

રચના.

નલ = નવ

પક્ષ.

કન સામાન્ય.

$\therefore \Delta$ નલક $\equiv \Delta$ નવક.

$\therefore \angle$ લકન = \angle વકન.

\therefore કન, મકર ને દુભાગે છે.

૧ ∴ ન, કાણુને દુભાગનાર રેખા ઉપર છે એટલે કે આપેલી શરત પૂરી કરવું બિંદુ ન નિધાન ઉપર છે.

(૨) પક્ષ : સકર અને ગકમથી બનતા કાણુને દુભાગનાર રેખા ઉપર ગમે તે એક પ બિંદુ હોય. \angle પકથ = \angle પકય.

સાધ્ય : પ બિંદુ બન્ને રેખાઓથી સરખે અંતરે છે. પથ = પય.

રચના : પથ અને પય અનુક્રમે ગકમ અને સકર ઉપર લંબ દોરો.

સાબીતી : \triangle ઓ પકથ અને પયકમાં
 \angle પકથ = \angle પકય પક્ષ.
કા. \angle પકથ = કા. \angle પયક રચના.
પક સામાન્ય.

∴ \triangle પકથ \equiv \triangle પયક.

∴ પથ = પય.

∴ પ બન્ને રેખાઓથી સરખે અંતરે છે.

∴ નિધાન ઉપરનું ગમે તે બિંદુ આપેલી શરત પૂરી કરે છે.

આજ પ્રમાણે \angle સકમ ને દુભાગનાર રેખા પથ તેનાથી સરખે અંતરે રહેતા બિંદુનું નિધાન છે એમ સાબીત થાય.

∴ માગેલું નિધાન એ રેખાઓથી બનતા કાણુને દુભાગનાર રેખાઓની જોડ છે.

મનોયતન ૨૦

૧. Δ સરગની ત્રણે ભુજઓથી સરખે અંતરે આવેલું એક ખિંદુ શોધી કહાડો.

૨. Δ સરગની ત્રણે ભુજઓ લખાવી બહિર્જત વર્તુલો દોરો.

૩. આપેલી સુરેખા સર ઉપર ગ અને મ ખિંદુઓથી સરખે અંતરે આવેલું ખિંદુ શોધી કહાડો.

૪. ત્રિકોણનો પાયો અને ઉંચાઈ આપેલી હોય તે ઉપરથી તેના શિરોખિંદુનું નિધાન શોધી કહાડો.

૫. ત્રિકોણની ત્રીજ ભુજમાં બે ભુજઓથી સરખે અંતરે આવેલું હોય તેવું એક ખિંદુ શોધી કહાડો.

૬. આપેલા પાયો ઉપર આવેલા સમઘ્રિભુજ ત્રિકોણના શિરો-ખિંદુનું નિધાન શોધી કહાડો.

૭. ચતુષ્કોણની બે પાસપાસેની ભુજઓથી સરખે અંતરે અને બીજી બે ભુજઓથી સરખે અંતરે આવેલું ખિંદુ શોધી કહાડો.

૮. બે સમાન્તર સુરેખાઓથી સરખે અંતરે અને બે પરસ્પર છેદતી સુરેખાઓથી સરખે અંતરે આવેલું ખિંદુ શોધી કહાડો.

૯. એક જ પાયો અને પાયો ઉપરની મધ્યગાની લંબાઈ આપી હોય તે ઉપરથી ત્રિકોણનાં શિરોખિંદુઓનું નિધાન શોધી કહાડો.

